

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. Mở đầu về phương trình

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Phương trình với ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$; trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x .
- Hai phương trình có cùng một tập nghiệm gọi là hai phương trình tương đương.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Cho phương trình : $ax + 2x + 3 = 2(1 + x)$.

Tìm a , biết $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

2. Cho phương trình : $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Trong các số -1 ; 1 ; -4 ; 4 số nào là nghiệm của phương trình ?

3. Chứng tỏ phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

$$x^2 - 4x + 4 = (x + 2)^2 - 8x.$$

4. Chứng tỏ phương trình sau vô nghiệm : $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Giải

1. Vì $x = 1$ là nghiệm của phương trình, nên thay $x = 1$ vào phương trình, ta có : $a.1 + 2.1 + 3 = 2(1 + 1) \Leftrightarrow a + 5 = 4 \Leftrightarrow a = -1$.

2. Thay $x = -1$ vào vế trái của phương trình, ta có :

$$(-1)^2 - 3(-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$$

Vậy $x = -1$ là một nghiệm của phương trình.

Tương tự : $x = 4$ cũng là nghiệm của phương trình,

$x = 1$; $x = -4$ không phải là nghiệm của phương trình.

3. Ta có : $x^2 - 4x + 4 = (x + 2)^2 - 8x$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 - 8x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 \quad (\text{luôn đúng với mọi } x).$$

4. Ta có : $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2$

Vì $(x + 1)^2 \geq 0$, với mọi x nên $(x + 1)^2 + 2 > 0$ với mọi x hay $(x^2 + 1)^2 + 2 \neq 0$.

Vậy phương trình vô nghiệm.

ĐỀ SỐ 2

1. Tìm m , biết rằng $x = 5$ là nghiệm của phương trình $2x + m = 3(1 - x)$.

2. Hai phương trình sau có tương đương không :

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \text{và} \quad x + 2 = 4.$$

3. Chứng tỏ phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2).$$

4. Chứng tỏ phương trình sau vô nghiệm : $|x| + 1 = 0$.

Giải

1. Thay $x = 5$ vào phương trình đã cho, ta được :

$$2.5 + m = 3(1 - 5) \Leftrightarrow m = -12 - 10 \Leftrightarrow m = -22.$$

2. Ta có : $x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 2 \Leftrightarrow x = 2$

Thay $x = 2$ vào phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$, ta có :

$$2^2 - 3.2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -6 = 0 \text{ (không đúng)}$$

Vậy $x = 2$ không là nghiệm của phương trình này.

Hai phương trình không thể tương đương.

3. Ta có : $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy phương trình luôn nghiệm đúng với mọi x .

4. Ta có : $|x| \geq 0$, với mọi $x \Rightarrow |x| + 1 > 0$ với mọi x .

Vậy phương trình vô nghiệm.

ĐỀ SỐ 3

1. Hai phương trình sau có tương đương không : $x^3 = x^2$ và $x = 1$.

2. Chứng tỏ phương trình sau vô nghiệm : $|x| = -2$.

3. Chứng tỏ hai phương trình sau là tương đương :

$$x^3 - 3x^2 - 1 = 0 \quad \text{và} \quad (x - 1)^3 - 3x = 0.$$

Giải

1. Phương trình $x^3 = x^2$ có nghiệm $x = 0$, nhưng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $x = 1$.

Vậy hai phương trình không tương đương.

2. Ta có : $|x| \geq 0 > -2$ với mọi x . Vậy phương trình vô nghiệm.

$$\begin{aligned} 3. \text{ Ta có : } (x-1)^3 - 3x &= 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Vậy hai phương trình tương đương.

ĐỀ SỐ 4

1. Hai phương trình sau tương đương không :

$$x + 2 = 0 \text{ và } (x + 2)(x^2 + 1) = 0.$$

2. Tìm m để phương trình $mx - 5 = 0$ có nghiệm $x = 4$.

3. Chứng tỏ phương trình sau đúng với mọi x :

$$|x - 1| = |1 - x|.$$

4. Chứng tỏ hai phương trình sau là tương đương :

$$(x + 2)^2 - 4x = 0 \text{ và } x^2 + 4 = 0.$$

Giải

1. Vì $x^2 + 1 > 0$, với mọi x nên $(x + 2)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$

Vậy hai phương trình tương đương.

2. Thay $x = 4$ vào phương trình, ta được :

$$m.4 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4m = 5 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}.$$

3. Vì $|A| = |-A|$, với mọi A , nên $|x - 1| = |-(x - 1)|$
 $\Leftrightarrow |x - 1| = |1 - x|$ với mọi x .

$$\begin{aligned} 4. \text{ Ta có : } (x + 2)^2 - 4x &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Vậy hai phương trình tương đương.

ĐỀ SỐ 5

1. Hai phương trình sau có tương đương không :

$$(x^2 - 4)(x - 2) = 0 \text{ và } x^2 - 4 = 0.$$

2. Tìm b để phương trình $3x + b = 0$ có nghiệm $x = -2$.

3. Chứng tỏ phương trình sau vô nghiệm : $(x + 3)^2 - 6x = 0$.

4. Chứng tỏ hai phương trình sau không tương đương :

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2} \text{ và } x^2 - 4 = 0.$$

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có : } (x^2 - 4)(x - 2) &= 0 &\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 2) &= 0 \\ &&\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) &= 0 \\ &&\Leftrightarrow x^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Vậy hai phương trình tương đương.

2. Thay $x = -2$ vào phương trình, ta được :

$$3.(-2) + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 6.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Ta có : } (x + 3)^2 - 6x &= 0 &\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 6x &= 0 \\ &&\Leftrightarrow x^2 + 9 &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x^2 \geq 0, \text{ với mọi } x \quad \Rightarrow \quad x^2 + 9 > 0 \text{ với mọi } x$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

$$\begin{aligned} 4. \text{ Ta có : } x^2 - 4 &= 0 &\Rightarrow (x - 2)(x + 2) &= 0 \\ &&\Rightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } x + 2 &= 0 \\ &&\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Nhưng } x = 2 \text{ không phải là nghiệm của phương trình } \frac{x^2}{x - 2} = \frac{4}{x - 2}.$$

Vậy hai phương trình không tương đương.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Hai phương trình sau có tương đương không ?

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$ và $x + 1 = 0$.

b) $(x^2 - 1)(x + 2) = 0$ và $x^2 - 1 = 0$.

c) $(x + 2)(x - 1)^2 = 3(x - 1)^2$ và $x + 2 = 3$.

d) $\frac{4x^2 - 25}{2x + 5} = 0$ và $2x - 5 = 0$.

e) $x + 1 = x$ và $x^2 + 1 = 0$.

2. Tìm a để $x = -2$ là nghiệm của phương trình : $x^3 + ax^2 - 4x - 4 = 0$.

3. Chứng tỏ hai phương trình sau tương đương :

a) $x^3 + 3x + 1 = 0$ và $(x + 1)^3 - 3x^2 = 0$.

b) $x^2 - 3x + 9 = 0$ và $(x - 3)^2 + 3x = 0$.

4. Chứng tỏ phương trình sau vô nghiệm :

a) $|2x - 1| = |1 - 2x| + 2$

b) $x^2 + 5 = x^2 + 6$.

Hướng dẫn

1. a) $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$.
b) $x = -2$ là nghiệm của phương trình thứ nhất, nhưng không phải là nghiệm của phương trình thứ hai.
c) Hai phương trình tương đương.
d) Hai phương trình tương đương.
e) Hai phương trình tương đương vì cùng vô nghiệm.
2. $a = 1$.
3. a) Hai phương trình đều có dạng : $x^3 + 3x + 1 = 0$
b) Hai phương trình đều có dạng : $x^2 - 3x + 9 = 0$
4. a) Vì $|2x - 1| = |1 - 2x| \Rightarrow |1 - 2x| + 2 \neq |2x - 1|$.
b) Vì $x^2 + 6 = (x^2 + 5) + 1 \neq x^2 + 5$.

§2. Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải.

Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Phương trình dạng $ax + b = 0$; với a, b là các số đã cho và $a \neq 0$ được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.
- Quy tắc chuyển vế : Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
- Quy tắc nhân với một số : Trong một phương trình, ta có thể nhân (chia) cả hai vế cho cùng một số khác 0.

$$\bullet \quad ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}.$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Giải phương trình :

$$a) \quad 2(x + 3)(x - 4) = (2x - 1)(x + 2) - 27 \quad (1)$$

$$b) \quad \frac{2x + 1}{3} - \frac{7x + 5}{15} = \frac{x - 2}{5} \quad (2)$$

2. Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm :

$$2(x + 1) - 1 = 3 - (1 - 2x).$$

3. Tìm m để phương trình $3x + m = x - 4$ nhận $x = -2$ là nghiệm.

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) (1)} & \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 3x - 12) = 2x^2 + 4x - x - 2 - 27 \\ & \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 2x^2 + 3x - 29 \\ & \Leftrightarrow -2x - 3x = 24 - 29 \\ & \Leftrightarrow -5x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{-5} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{1\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) (2)} & \Leftrightarrow 5(2x + 1) - (7x + 5) = 3(x - 2) \\ & \Leftrightarrow 10x + 5 - 7x - 5 = 3x - 6 \\ & \Leftrightarrow 3x = 3x - 6 \Leftrightarrow 0x = -5. \text{ Phương trình vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \emptyset$.

$$\begin{aligned} 2. \quad 2(x + 1) - 1 &= 3 - (1 - 2x) \Leftrightarrow 2x + 2 - 1 = 3 - 1 + 2x \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = 2 + 2x \Leftrightarrow 0x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

3. Thay $x = -2$ vào phương trình, ta được :

$$\begin{aligned} 3.(-2) + m &= -2 - 4 \Leftrightarrow -6 + m = -6 \\ &\Leftrightarrow m = 6 - 6 \Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 2

1. Giải phương trình : a) $(3x + 2)(x - 1) - 3(x + 1)(x - 2) = 4$ (1)

b) $2 - \frac{3x-7}{4} + \frac{x+17}{5} = 0$ (2)

c) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - 2x = x(x - 1)(x + 1)$ (3)

2. Tìm m để phương trình $(m - 1)x + 2 = m - 1$ nhận $x = 2$ là nghiệm.

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) (1)} & \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 2x - 2 - 3(x^2 - 2x + x - 2) = 4 \\ & \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 - 3x^2 + 3x + 6 = 4 \\ & \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{0\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) (2)} & \Leftrightarrow 40 - 5(3x - 7) + 4(x + 17) = 0 \\ & \Leftrightarrow 40 - 15x + 35 + 4x + 68 = 0 \\ & \Leftrightarrow -11x = -143 \Leftrightarrow x = \frac{-143}{-11} \Leftrightarrow x = 13. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{13\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) (3)} & \Leftrightarrow x^3 - 1 - 2x = x(x^2 - 1) \\
 & \Leftrightarrow x^3 - 1 - 2x = x^3 - x \\
 & \Leftrightarrow -2x + x = 1 \quad \Leftrightarrow -x = 1 \quad \Leftrightarrow x = -1
 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{-1\}$.

2. Thế $x = 2$ vào phương trình đã cho, ta được :

$$\begin{aligned}
 (m - 1).2 + 2 &= m - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2m - 2 + 2 = m - 1 \\
 &\Leftrightarrow \quad 2m - m = -1 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1.
 \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 3

1. Giải phương trình :

$$\text{a) } (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 3)(x + 3) = 26 \quad (1)$$

$$\text{b) } (3x + 2)(3x - 2) - (3x - 4)^2 = 28 \quad (2)$$

$$\text{c) } \frac{(2x + 5)(x - 3)}{2} - x(x + 3) = -1 \quad (3)$$

2. Chứng minh rằng phương trình sau có tập nghiệm là \mathbf{R} .

$$3(1 - x) + 2 = 5 - 3x.$$

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{1. a) (1)} & \Leftrightarrow x^3 + 8 - x(x^2 - 9) = 26 \\
 & \Leftrightarrow x^3 + 8 - x^3 + 9x = 26 \\
 & \Leftrightarrow 9x = 26 - 8 \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 18 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2
 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{2\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) (2)} & \Leftrightarrow 9x^2 - 4 - (9x^2 - 24x + 16) = 28 \\
 & \Leftrightarrow 9x^2 - 4 - 9x^2 + 24x - 16 = 28 \\
 & \Leftrightarrow 24x = 48 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.
 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{2\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) (3)} & \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 5x - 15 - 2x^2 - 6x = -2 \\
 & \Leftrightarrow -7x = 13 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{13}{7}.
 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \left\{-\frac{13}{7}\right\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{2. } 3(1 - x) + 2 &= 5 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 3x + 2 = 5 - 3x \\
 &\Leftrightarrow \quad 5 - 3x = 5 - 3x \quad (\text{luôn đúng với mọi } x)
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là \mathbf{R} .

ĐỀ SỐ 4

1. Giải phương trình :

$$a) 5(x+3)^2 - 5(x-4)(x+8) = 3x \quad (1)$$

$$b) 2x + \frac{3x-1}{2} - \frac{5x-2}{3} = 2 \quad (2)$$

$$c) 2x(x+2)^2 - 8x^2 = 2(x-2)(x^2+2x+4) \quad (3)$$

2. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm : $mx = 2 - x$.

Giải

$$1. a) (1) \Leftrightarrow 5x^2 + 30x + 45 - 5(x^2 + 8x - 4x - 32) = 3x$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 30x + 45 - 5x^2 - 20x + 160 = 3x$$

$$\Leftrightarrow 10x - 3x = -205 \Leftrightarrow 7x = -205 \Leftrightarrow x = -\frac{205}{7}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \left\{ -\frac{205}{7} \right\}$$

$$b) (2) \Leftrightarrow 12x + 9x - 3 - 10x + 4 = 12$$

$$\Leftrightarrow 11x = 11 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \{1\}$$

$$c) (3) \Leftrightarrow 2x(x^2 + 4x + 4) - 8x^2 = 2(x^3 - 8)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 8x^2 + 8x - 8x^2 = 2x^3 - 16$$

$$\Leftrightarrow 8x = -16 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \{-2\}$$

$$2. \text{Ta có : } mx = 2 - x \Leftrightarrow mx + x = 2 \Leftrightarrow (m+1)x = 2$$

$$\text{Phương trình vô nghiệm khi } m+1=0 \Leftrightarrow m=-1.$$

ĐỀ SỐ 5

1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm : $2mx - 3 = 4x$.

2. Tìm m để phương trình : $2mx - m = 1 + x$ vô nghiệm.

3. Giải phương trình : $(2x-1)(4x^2+2x+1) - 4x(2x^2-3) = 23 \quad (1)$

4. Tìm giá trị của x để hai biểu thức sau có giá trị bằng nhau.

$$A = (x-1)(x^2+x+1) - 2x;$$

$$B = x(x-1)(x+1) + 2x - 3.$$

Giải

$$1. 2mx - 3 = 4x \Leftrightarrow 2mx - 4x = 3 \Leftrightarrow (2m-4)x = 3$$

Phương trình có nghiệm khi :

$$2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow 2m \neq 4 \Leftrightarrow m \neq 2.$$

$$2. \quad 2mx - m = 1 + x \Leftrightarrow 2mx - x = 1 + m \Leftrightarrow (2m - 1)x = 1 + m$$

Phương trình vô nghiệm khi :

$$2m - 1 = 0 \quad \text{và} \quad 1 + m \neq 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

$$3. \quad (1) \Leftrightarrow 8x^3 - 1 - 8x^3 + 12x = 23 \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = 2$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{2\}$.

$$4. \quad A = B \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) - 2x = x(x - 1)(x + 1) + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 - 2x = x(x^2 - 1) + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 - 2x = x^3 - x + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow -3x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải phương trình :

$$a) \quad x(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 1 = 0$$

$$b) \quad x(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x + 1)x = x^2 + 2$$

$$c) \quad \frac{2(5x + 2)}{9} - 1 = \frac{4(33 + 2x)}{5} - \frac{5(1 - 11x)}{9}$$

$$d) \quad \frac{2(x - 4)}{3} + \frac{3x + 13}{8} = \frac{2(2x - 3)}{5} - 7.$$

2. Tìm m để phương trình vô nghiệm :

$$a) \quad (m + 1)x - x - 2 + m = 0$$

$$b) \quad m(x - 2) = 3(1 + x) - 2x.$$

3. Tìm giá trị của x để hai biểu thức sau có giá trị bằng nhau.

$$a) \quad A = (x + 1)^3 - (x - 1)^3; \quad B = 6(x^2 + x + 1).$$

$$b) \quad A = (x + 2)(x + 4) + (x - 3)(x + 3); \quad B = (2x + 3)(x + 1).$$

Hướng dẫn

$$1. \quad a) \quad S = \{7\}$$

$$b) \quad S = \{1\}$$

$$c) \quad S = \{-4\}$$

$$d) \quad S = \{49\}.$$

$$2. \quad a) \quad m = 0$$

$$b) \quad m = 1.$$

$$3. \quad a) \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$b) \quad x = 4.$$

§3. Phương trình tích

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ hoặc } B(x) = 0.$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Giải phương trình : 1. $3x(x - 1) + 2(1 - x) = 0$ (1)

2. $x^2 - 4 - (x + 5)(2 - x) = 0$ (2)

3. $2x^3 + 4x^2 = x^2 + 2x$ (3)

Giải

1. (1) $\Leftrightarrow 3x(x - 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x - 2) = 0$
 $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \left\{1; \frac{2}{3}\right\}$.

2. (2) $\Leftrightarrow x^2 - 4 + (x + 5)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2 + x + 5) = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)(2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } 2x + 7 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{7}{2}$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \left\{2; -\frac{7}{2}\right\}$.

3. (3) $\Leftrightarrow 2x^2(x + 2) = x(x + 2) \Leftrightarrow 2x^2(x + 2) - x(x + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow (x + 2)(2x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x(x + 2)(2x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x + 2 = 0 \text{ hoặc } 2x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -2 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \left\{0; -2; \frac{1}{2}\right\}$.

ĐỀ SỐ 2

Giải phương trình : 1. $x(2x - 3) - 4x + 6 = 0$ (1)

2. $x^3 - 1 = x(x - 1)$ (2)

3. $x^2 - 3x - 4 = 0$ (3)

Giải

$$\begin{aligned} 1. (1) &\Leftrightarrow x(2x - 3) - 2(2x - 3) = 0 &\Leftrightarrow (2x - 3)(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ hoặc } x = 2 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \left\{ \frac{3}{2}; 2 \right\}$.

$$\begin{aligned} 2. (2) &\Leftrightarrow x^3 - 1 - x(x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1 - x) = 0 &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

(phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 1 > 0$, với mọi x)

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{1\}$.

$$\begin{aligned} 3. (3) &\Leftrightarrow x^2 - 4x + x - 4 = 0 &\Leftrightarrow x(x - 4) + (x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 &\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ hoặc } x + 1 = 0 \\ &&\Leftrightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = -1 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{4; -1\}$.

ĐỀ SỐ 3

1. Cho phương trình : $x^3 + x^2 + mx - 4 = 0$.

a) Tìm m biết phương trình có một nghiệm $x = -2$.

b) Giải phương trình với m vừa tìm được ở câu a).

2. Giải phương trình : $(2x - 5)^2 - x^2 - 4x - 4 = 0$.

Giải

1. a) Thay $x = -2$ vào phương trình đã cho, ta được :

$$-8 + 4 - 2m - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2m = 8 \quad \Leftrightarrow \quad m = -4.$$

b) Với $m = -4$, ta có phương trình :

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 4x - 4 &= 0 &\Leftrightarrow &x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4) &= 0 &\Leftrightarrow &(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ hoặc } x - 2 &= 0 \text{ hoặc } x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2 &\text{ hoặc } x = -2. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{-1; 2; -2\}$.

$$\begin{aligned} 2. (2x - 5)^2 - x^2 - 4x - 4 &= 0 &\Leftrightarrow &(2x - 5)^2 - (x^2 + 4x + 4) = 0 \\ &&\Leftrightarrow &(2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2x - 5 + x + 2)(2x - 5 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 3)(x - 7) = 0 \quad \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \text{ hoặc } x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 7$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{1; 7\}$.

ĐỀ SỐ 4

Cho phương trình : $4x^2 + 4mx + m^2 - 25 = 0$.

- Tìm các giá trị của m biết phương trình có một nghiệm $x = -2$.
- Giải phương trình với mỗi giá trị m tìm được ở câu a).

Giải

- Thay $x = -2$ vào phương trình đã cho, ta được :

$$16 - 8m + m^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9m + m - 9 = 0 \Leftrightarrow m(m - 9) + (m - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 9)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow m - 9 = 0 \text{ hoặc } m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 9 \text{ hoặc } m = -1.$$

- Khi $m = 9$, phương trình có dạng : $4x^2 + 36x + 81 - 25 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 9)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (2x + 9 + 5)(2x + 9 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 14)(2x + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 14 = 0 \text{ hoặc } 2x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -7 \text{ hoặc } x = -2$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{-7; -2\}$.

Khi $m = -1$, phương trình có dạng : $4x^2 - 4x + 1 - 25 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1 + 5)(2x - 1 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 4)(2x - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \text{ hoặc } 2x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 3$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{-2; 3\}$.

ĐỀ SỐ 5

- Giải phương trình :
- $(x - 2)(x^2 + 3x - 2) - x^3 + 8 = 0$ (1)
 - $x^2 + x - 12 = 0$ (2)
 - $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 0$ (3)

Giải

$$1. (1) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 3x - 2) - (x^3 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 3x - 2) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x-2-x^2-2x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-6)=0 \quad \Leftrightarrow x-2=0 \text{ hoặc } x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=6$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{2; 6\}$.

$$2. (2) \quad \Leftrightarrow x^2-3x+4x-12=0 \quad \Leftrightarrow x(x-3)+4(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+4)=0 \quad \Leftrightarrow x-3=0 \text{ hoặc } x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ hoặc } x=-4$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{3; -4\}$.

$$3. (3) \quad \Leftrightarrow (2x^3-8x)+(3x^2-12)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2-4)+3(x^2-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ hoặc } x+2=0 \text{ hoặc } 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=-2 \text{ hoặc } x=-\frac{3}{2}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \left\{2; -2; -\frac{3}{2}\right\}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Giải phương trình :

$$1. x^3-4x^2-x+4=0$$

$$2. x^3-x^2-x-2=0$$

$$3. x^4-3x^3+3x^2-x=0$$

$$4. (x^2+3x+2)(x^2+3x+3)-2=0$$

$$5. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=0.$$

Hướng dẫn

$$1. x^3-4x^2-x+4=x^2(x-4)-(x-4)=(x-4)(x^2-1).$$

$$2. x^3-x^2-x-2=x^3-2x^2+x^2-2x+x-2=(x-2)(x^2+x+1).$$

$$3. x^4-3x^3+3x^2-x=x(x^3-3x^2+3x-1)=x(x-1)^3.$$

$$4. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-24 \\ = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$$

Đặt $u = x^2 + 5x + 4$, ta có :

$$u(u+2)-24=u^2+2u-24=u^2+6u-44-24=(u+6)(u-4).$$

§4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4 (Kết luận). Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Giải phương trình :

$$1. \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$2. \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0.$$

Giải

$$1. \text{ĐKXD : } x-2 \neq 0 \text{ và } x+2 \neq 0 \text{ (khi đó : } x^2-4 = (x-2)(x+2) \neq 0) \\ \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ và } x \neq -2.$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức hai vế : } \frac{(x+2)^2}{x^2-4} - \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4}.$$

$$\text{Khử mẫu, ta được : } x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 4$$

$$\Leftrightarrow 8x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$2. \text{ĐKXD : } x-1 \neq 0 \text{ và } x+3 \neq 0 \text{ (khi đó : } x^2+2x-3 = (x-1)(x+3) \neq 0) \\ \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ và } x \neq -3.$$

Quy đồng mẫu thức hai vế :

$$\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} - \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+3)} + \frac{4}{(x-1)(x+3)} = 0$$

$$\text{Khử mẫu, ta được : } x^2 + 3x + x + 3 - x^2 + x - 2x + 2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3 \text{ (không thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \emptyset.$$

ĐỀ SỐ 2

Giải phương trình :

$$1. \frac{2}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

$$2. \frac{1}{x-5} - \frac{3}{x^2-6x+5} = \frac{5}{x-1}$$

Giải

$$1. \text{ĐKXD : } x-1 \neq 0 \text{ và } x^2+x+1 \neq 0 \text{ (khi đó } x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ (vì } x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ với mọi } x)$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức hai vế : } \frac{2(x^2+x+1)}{x^3-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{x(x-1)}{x^3-1}$$

$$\text{Khử mẫu, ta được : } 2x^2+2x+2-3x^2 = x^2-x$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+x-2=0 \Leftrightarrow 2x(x-2)+(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x+1)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ hoặc } 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=-\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \left\{2; -\frac{1}{2}\right\}$$

$$2. \text{ĐKXD : } x-5 \neq 0 \text{ và } x-1 \neq 0 \text{ (khi đó } x^2-6x+5 = (x-5)(x-1) \neq 0)$$

Quy đồng mẫu thức hai vế :

$$\frac{x-1}{(x-5)(x-1)} - \frac{3}{(x-5)(x-1)} = \frac{5(x-5)}{(x-5)(x-1)}$$

$$\text{Khử mẫu, ta được : } x-1-3=5x-25 \Leftrightarrow -4x=-21$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{21}{4} \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \left\{\frac{21}{4}\right\}$$

ĐỀ SỐ 3

$$\text{Giải phương trình : } 1. \frac{8x^2}{3(1-4x^2)} = \frac{2x}{6x-3} - \frac{1+8x}{4+8x} \quad (1)$$

$$2. \frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} = 0 \quad (2)$$

Giải

$$1. (1) \Leftrightarrow \frac{8x^2}{3(1-4x^2)} = \frac{-2x}{3(1-2x)} - \frac{1+8x}{4(1+2x)}$$

$$\text{ĐKXD} : 1-2x \neq 0 \text{ và } 1+2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ và } x \neq -\frac{1}{2}$$

$$(\text{khi đó } 1-4x^2 = (1-2x)(1+2x) \neq 0)$$

Quy đồng mẫu thức hai vế :

$$\frac{32x^2}{12(1-4x^2)} = \frac{-8x(1+2x)}{12(1-4x^2)} - \frac{3(1+8x)(1-2x)}{12(1-4x^2)}$$

$$\text{Khử mẫu, ta được : } 32x^2 = -8x - 16x^2 - 3 + 6x - 24x + 48x^2$$

$$\Leftrightarrow 26x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{26} \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \left\{ -\frac{3}{26} \right\}.$$

$$2. \text{ĐKXD} : x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức hai vế : } \frac{x(x+1)}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2-1} = 0$$

$$\text{Khử mẫu : } x^2 + x - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \text{ (} x = 1 \text{ không thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình : } S = \{0\}.$$

ĐỀ SỐ 4

Giải phương trình :

$$1. \frac{2-x}{x-1} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$2. \frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = \frac{x+2}{x-2}$$

Giải

$$1. \text{ĐKXD} : x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \text{ và } x+1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ và } x \neq -1$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức hai vế : } \frac{2-x}{x-1} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{-2x}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)(x+1)}{x^2-1} + \frac{(x-3)(x-1)}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-1} = 0$$

Khử mẫu, ta được : $(2 - x)(x + 1) + (x - 3)(x - 1) + 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 - x^2 - x + x^2 - x - 3x + 3 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{5\}$.

2. ĐKXD : $x \neq 0$ và $x - 2 \neq 0$ (vì vậy $x^2 - 2x = x(x - 2) \neq 0$)

Quy đồng mẫu thức hai vế : $\frac{2}{x(x - 2)} + \frac{x - 2}{x(x - 2)} = \frac{x(x + 2)}{x(x - 2)}$

Khử mẫu, ta được : $2 + x - 2 = x(x + 2) \Leftrightarrow x = x(x + 2)$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 1 \text{ (vì } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{-1\}$.

ĐỀ SỐ 5

Giải phương trình :

1. $\frac{x - 1}{x} + \frac{1 - 2x}{x^2 + x} = \frac{1}{x + 1}$

2. $\frac{x + 2}{x + 1} - \frac{1}{x - 2} = 1 - \frac{3}{x^2 - x - 2}$

Giải

1. ĐKXD : $x \neq 0$ và $x + 1 \neq 0$ (vì vậy $x^2 + x = x(x + 1) \neq 0$)

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ và } x \neq -1$$

Quy đồng mẫu thức hai vế : $\frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)} + \frac{1 - 2x}{x(x + 1)} = \frac{x}{x + 1}$

Khử mẫu, ta được : $x^2 - 1 + 1 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ (vì } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Tập nghiệm của phương trình : $S = \{3\}$.

2. ĐKXD : $x + 1 \neq 0$ và $x - 2 \neq 0$ (vì vậy $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) \neq 0$)

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ và } x \neq 2$$

Quy đồng mẫu thức hai vế :

$$\frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} - \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} - \frac{3}{(x + 1)(x - 2)}$$

Khử mẫu, ta được : $x^2 - 4 - x - 1 = x^2 - x - 2 - 3 \Leftrightarrow 0x = 0$

Phương trình luôn nghiệm đúng với mọi $x \neq -1$ và $x \neq 2$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Giải phương trình :

$$1. \frac{x+2}{x} = \frac{x^2+5x+4}{x^2+2x} - \frac{x}{x+2}$$

$$2. \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$$

$$3. \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{x^2+18x+7}{x^2+x-12}$$

$$4. \frac{1}{3x-1} + \frac{2x+2}{x-1} - \frac{3x^2+1}{3x^2-4x+1} = 1$$

$$5. \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$$

Hướng dẫn

$$1. S = \{1\}$$

$$2. S = \{0\}$$

$$3. S = \{0\}$$

$$4. S = \left\{ \frac{5}{9} \right\}$$

$$5. S = \{0\}$$

§5, 6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bước 1. Lập phương trình :

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng tổng của hai chữ số đó là 10 và nếu đổi chỗ hai chữ số ấy thì được số mới lớn hơn số cũ là 36.

Giải

Gọi chữ số hàng đơn vị của số đã cho là x ($0 \leq x \leq 9$; $x \in \mathbf{N}$).

Khi đó, chữ số hàng chục là $10 - x$.

Chữ số đã cho có dạng : $10(10 - x) + x = 100 - 9x$

Khi đổi chỗ, ta được số mới có dạng : $10x + 10 - x = 9x + 10$

Theo bài ra, ta có phương trình :

$$\begin{aligned}9x + 10 &= (100 - 9x) + 36 &\Leftrightarrow & 18x = 126 \\&&\Leftrightarrow & x = 7 \text{ (thỏa điều kiện)}\end{aligned}$$

Vậy số đã cho là 37.

ĐỀ SỐ 2

Tìm một số có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị gấp đôi chữ số hàng chục. Nếu đặt chữ số 2 xen vào giữa hai chữ số của số đã cho ta được một số lớn hơn số đã cho là 200.

Giải

Gọi x là chữ số hàng chục của số đã cho, khi đó chữ số hàng đơn vị của nó là $2x$ ($0 < x \leq 4; x \in \mathbb{N}$).

Xen chữ số 2 vào giữa hai chữ số đã cho, ta được :

$$100x + 2 \cdot 10 + 2x = 102x + 20$$

Theo bài ra, ta có phương trình :

$$\begin{aligned}102x + 20 &= 10x + 2x + 200 &\Leftrightarrow & 9x = 180 \\&&\Leftrightarrow & x = 2 \text{ (nhận)}\end{aligned}$$

Số phải tìm là 24.

ĐỀ SỐ 3

Năm nay tuổi của anh gấp 3 lần tuổi của em. Sau 6 năm nữa tuổi của anh chỉ còn gấp đôi hai lần tuổi của em. Hỏi năm nay em bao nhiêu tuổi ?

Giải

Gọi x là số tuổi của em năm nay ($x \in \mathbb{N}^*$); khi đó số tuổi của anh năm nay là $3x$. Sau 6 năm nữa, tuổi của em là $x + 6$; tuổi của anh là $3x + 6$.

Ta có phương trình :

$$\begin{aligned}3x + 6 &= 2(x + 6) &\Leftrightarrow & 3x - 2x = 12 - 6 \\&&\Leftrightarrow & x = 6\end{aligned}$$

Vậy năm nay em 6 tuổi.

ĐỀ SỐ 4

Cho một lượng dung dịch chứa 10% muối. Nếu pha thêm 200g nước thì được một dung dịch chứa 6% muối. Hỏi có bao nhiêu gam dung dịch đã cho ?

Giải

Gọi x (gam; $x > 0$) là lượng dung dịch ban đầu.

Lượng muối trong dung dịch lúc đầu là $\frac{x}{10}$ (gam).

Pha thêm 200g nước, ta có $x + 200$ (gam).

Tỉ lệ phần trăm muối trong dung dịch mới bằng $\frac{x}{10(x + 200)}$.

Ta có phương trình :

$$\begin{aligned}\frac{x}{10(x + 200)} = \frac{6}{100} &\Leftrightarrow \frac{x}{x + 200} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5x = 3x + 600 \\ &\Leftrightarrow 2x = 600 \Leftrightarrow x = 200.\end{aligned}$$

Vậy lượng dung dịch ban đầu có 300 (gam).

ĐỀ SỐ 5

Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ người thứ nhất.

Hỏi nếu làm riêng, người thứ nhất làm trong bao lâu sẽ xong công việc ?

Giải

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất làm xong công việc ($x > 0$).

Một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Một ngày người thứ hai làm được $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{3x}$ (công việc).

Cả hai người làm chung trong 1 ngày được : $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$ (công việc)

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12 + 8 = x \Leftrightarrow x = 20$

Trả lời : Người thứ nhất làm xong trong 20 ngày.

ĐỀ SỐ 6

Một canô đi từ bến A đến bến B hết 6 giờ; khi đi từ B về A nhanh hơn lúc đi là 4km/giờ nên thời gian chỉ mất 5 giờ. Tính quãng đường AB.

Giải

Gọi x là vận tốc của canô khi đi từ A đến B, khi đó vận tốc đi từ B đến A là $x + 4$ (km/h; $x > 0$).

Ta có phương trình : $6x = 5(x + 4) \Leftrightarrow 6x = 5x + 20 \Leftrightarrow x = 20$

Vậy quãng đường AB là : $6 \cdot 20 = 120$ (km).

ĐỀ SỐ 7

Một hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và giảm chiều rộng đi 3m thì diện tích giảm 90m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng.

Giải

Gọi x là chiều rộng của hình chữ nhật ($x > 0$, x tính bằng m), khi đó chiều dài là $3x$. Diện tích hình chữ nhật bằng $3x^2$ (m^2).

Ta có phương trình :

$$\begin{aligned}(3x + 2)(x - 3) &= 3x^2 - 90 & \Leftrightarrow & 3x^2 - 9x + 2x - 6 = 3x^2 - 90 \\ & & \Leftrightarrow & -7x = -84 & \Leftrightarrow & x = 14\end{aligned}$$

Vậy chiều rộng là 14m, chiều dài là 42m.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Một số có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục gấp ba lần chữ số hàng đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số nhỏ hơn số đã cho là 18. Tìm số đó.
2. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 56m. Nếu tăng chiều dài thêm 4m và giảm chiều rộng 4m thì diện tích tăng thêm 8m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.
3. Quãng đường từ A đến B là 100km. Lúc đi ô tô có vận tốc bằng $\frac{6}{5}$ vận tốc lúc về. Đến B nghỉ lại 20 phút, và quay về A hết cả thảy 4 giờ. Tìm vận tốc khi đi và về của ô tô.
4. Hai người cùng làm một công việc trong 4 ngày thì xong. Nhưng chỉ làm được 2 ngày đầu thì người thứ nhất chuyển đi làm việc khác. Người thứ hai tiếp tục làm trong 6 ngày nữa mới xong. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu sẽ xong ?
5. Trong 3 ngày làm việc hai người làm được 930 sản phẩm, biết rằng người thứ nhất làm một ngày nhiều hơn người thứ hai 10 sản phẩm. Hỏi mỗi người trong một ngày làm được bao nhiêu sản phẩm ?

Hướng dẫn

1. Gọi x là chữ số hàng đơn vị thì chữ số đó là $3x$.

Ta có phương trình : $(10.3x + x) - (10x + 3x) = 18$

Ta tìm được $x = 1$.

Đáp số : 31.

2. Gọi x là chiều dài thì chiều rộng là $28 - x$.

Ta có phương trình : $(x + 4)(26 - x) = x(28 - x) + 8$

Ta tìm được $x = 16$.

3. Gọi x là vận tốc khi về thì vận tốc lúc đi là $\frac{6}{5}x$

Ta có phương trình : $\frac{100}{\frac{6}{5}x} + \frac{100}{x} + \frac{1}{3} = 4$ ($\frac{1}{3}$ giờ = 20 phút)

Ta tìm được $x = 50$.

4. Gọi x là số ngày người thứ hai làm xong công việc.

1 ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{x}$ công việc nên 6 ngày người đó làm được $\frac{6}{x}$ công việc. Hai người làm chung 2 ngày được $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ công việc.

Ta có phương trình : $\frac{6}{x} = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 12$

Đáp số : 6 và 12 (ngày).

5. Gọi x là số sản phẩm người thứ hai làm trong 1 ngày thì người thứ nhất 1 ngày làm được $x + 10$ sản phẩm.

Ta có phương trình : $3x + 3(x + 10) = 930 \Leftrightarrow x = 150$

Đáp số : 160 và 150.

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA MỘT TIẾT

ĐỀ SỐ 1

1. Giải phương trình :

a) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 6x + 18$ (*)

b) $\frac{x + 3}{x - 2} = \frac{5}{(x - 2)(3 - x)}$

c) $\frac{12x^2 + 30x - 21}{16x^2 - 9} - \frac{3x - 7}{3 - 4x} = \frac{6x + 5}{4x + 3}$

d) $\frac{4}{x + 1} - \frac{2}{x - 2} = \frac{x + 3}{x^2 - x - 2}$

2. Đường sông từ tỉnh A đến tỉnh B ngắn hơn đường bộ 12km. Từ A đến B, canô đi hết 4 giờ 20 phút, ô tô đi hết 3 giờ. Vận tốc canô nhỏ hơn vận tốc ô tô là 14km/h. Tính vận tốc của canô và độ dài đường sông từ A đến B.

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } (*) & \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 = 6x + 18 \\ & \Leftrightarrow 6x = 18 \quad \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{3\}$.

$$\text{b) ĐKXD : } x - 2 \neq 0 \text{ và } 3 - x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2 \text{ và } x \neq 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó : } (x + 3)(3 - x) &= 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - x^2 + 9 - 3x = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2 + x)(2 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 + x = 0 \text{ hoặc } 2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ hoặc } x = 2 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 2$ không thỏa ĐKXD.

Tập nghiệm : $S = \{-2\}$.

$$\text{c) ĐKXD : } 3 - 4x \neq 0 \text{ và } 3 + 4x \neq 0 \quad (16x^2 - 9 = -(3 - 4x)(3 + 4x) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{3}{4} \text{ và } x \neq -\frac{3}{4}$$

Quy đồng mẫu thức :

$$\frac{-(12x^2 + 30x - 21)}{9 - 16x^2} - \frac{(3x - 7)(3 + 4x)}{9 - 16x^3} = \frac{(6x + 5)(3 - 4x)}{9 - 16x^2}$$

Khử mẫu, ta được :

$$\begin{aligned} -12x^2 - 30x + 21 - (9x + 12x^2 - 21 - 28x) &= 18x - 24x^2 + 15 - 20x \\ \Leftrightarrow -12x^2 - 30x + 21 - 9x - 12x^2 + 21 + 28x &= 18x - 24x^2 + 15 - 20x \\ \Leftrightarrow -9x = -27 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{3\}$.

$$\text{d) ĐKXD : } x + 1 \neq 0 \text{ và } x - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1 \text{ và } x \neq 2$$

$$(\text{khi đó : } x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) \neq 0)$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức : } \frac{4(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} - \frac{2(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{x + 3}{(x + 1)(x - 2)}$$

$$\text{Khử mẫu : } 4x - 8 - 2x - 2 = x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 13.$$

Tập nghiệm : $S = \{13\}$.

2. Gọi x (km/h; $x > 0$) là vận tốc của canô, thì vận tốc của ô tô là $x + 14$ (km/h).

$$\text{Ta có phương trình : } \frac{13}{3}x + 12 = 3(x + 14) \quad \left(\frac{13}{3}h = 4 \text{ giờ } 20 \text{ phút}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 13x + 36 = 9x + 126 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{45}{2} (= 22,5)$$

Đáp số : Vận tốc canô : 22,5 (km/h).

Quãng đường sông từ A đến B : 97,5 (km).

ĐỀ SỐ 2

1. Giải phương trình :

a) $(5x - 3)^2 = (4x - 7)^2$ (*)

b) $\frac{96}{x^2 - 16} + 6 = \frac{2x - 1}{x + 4} + \frac{3x - 1}{x - 4}$

c) $\frac{1 - x}{2x^2 - 4x} - \frac{1}{4x - 4} = \frac{x - 1}{2x(x - 2)} - \frac{1}{2x}$

2. Cho một phân số có mẫu số lớn hơn là 11. Nếu tăng tử số thêm 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì giá trị phân số mới bằng $\frac{3}{4}$. Tìm phân số đã cho.

Giải

1. a) (*) $\Leftrightarrow (5x - 3)^2 - (4x - 7)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (5x - 3 + 4x - 7)(5x - 3 - 4x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x - 10)(x + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow 9x - 10 = 0 \text{ hoặc } x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{9} \text{ hoặc } x = -4$$

Tập nghiệm : $S = \left\{ \frac{10}{9}; -4 \right\}$.

b) ĐKXD : $(x + 4)(x - 4) \neq 0 \Leftrightarrow x + 4 \neq 0 \text{ và } x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 4$

Ta có : $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4) \neq 0$

Quy đồng và khử mẫu, ta được :

$$96 + 6(x^2 - 16) = (2x - 1)(x - 4) + (3x - 1)(x + 4)$$

$$\Leftrightarrow 96 + 6x^2 - 96 = 2x^2 - 8x - x + 4 + 3x^2 + 12x - x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Tập nghiệm : $S = \{0; 2\}$.

c) ĐKXD : $x \neq 0; x - 1 \neq 0 \text{ và } x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0; x \neq 1 \text{ và } x \neq 2$

MTC : $4x(x - 2)(x - 1)$

Quy đồng mẫu thức và khử mẫu, ta được :

$$2(1 - x)(x - 1) - x(x - 2) = 2(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2 - x^2 + 2x = 2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 6x - 4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{4}{3}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$.

2. Gọi x là tử số thì mẫu số là $x + 11$ ($x \in \mathbb{Z}$).

Ta có phương trình : $\frac{x+3}{(x+11)-4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x+12 = 3x+21 \Leftrightarrow x=9$

Đáp số : $\frac{9}{20}$.

ĐỀ SỐ 3

1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x = 1$:

$$3(2x+m)(x+2) - 2(2x+1) = 18.$$

2. Giải phương trình :

a) $(x-2)^2 - 4(x+3) = x(x-4)$ (*)

b) $\frac{3}{x+1} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{x}{x-2}$

c) $\frac{x}{2x-6} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x^2}{x^2-2x-3}$

3. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 20km/h; lúc quay về với vận tốc 15km/h nên thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 10 phút. Tính quãng đường AB.

Giải

1. Thay $x = 1$ vào phương trình đã cho, ta có :

$$3(2+m)(1+2) - 2(2+1) = 18 \Leftrightarrow 18 + 9m - 6 = 18$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

2. a) (*) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4x - 12 = x^2 - 4x$

$$\Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$$

Tập nghiệm : $S = \{-2\}$.

b) ĐKXĐ : $x+1 \neq 0$ và $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 2$.

MTC : $(x+1)(x-2)$.

Quy đồng mẫu thức : $\frac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

Khử mẫu, ta được : $3x - 6 + x^2 - 1 = x^2 + x$

$$\Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

$$c) \text{ ĐKXD : } 2x - 6 \neq 0 \text{ và } 2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ và } x \neq -1.$$

$$\text{MTC : } 2(x - 3)(x + 1) \quad (x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1))$$

Quy đồng mẫu thức và khử mẫu, ta được :

$$\begin{aligned} x(x + 1) + x(x - 3) &= 4x^2 &\Leftrightarrow x^2 + x + x^2 - 3x &= 4x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 &\Leftrightarrow x(x + 2) &= 0 \\ &&\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x + 2 &= 0 \\ &&\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -2 &(\text{nhận}) \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{0; -2\}$.

3. Gọi x là quãng đường AB ($x > 0$; x tính bằng km).

$$\text{Ta có phương trình : } \frac{x}{15} - \frac{x}{20} = \frac{1}{6} \quad \left(\frac{1}{6} \text{ h} = 10 \text{ phút}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3x = 10 \quad \Leftrightarrow x = 10 \text{ (nhận)}$$

Trả lời : Quãng đường AB dài 10km.

ĐỀ SỐ 4

1. Giải phương trình :

$$a) (x + 3)^2 - 25 = 0$$

$$b) \frac{3}{2x+10} + \frac{2x}{25-x^2} + \frac{3}{x-5} = 0$$

$$c) \frac{x+5}{x-1} - \frac{x+1}{x-3} = \frac{8}{x^2-4x+3}$$

2. Một xí nghiệp dự định sản xuất mỗi ngày 120 sản phẩm. Khi thực hiện mỗi ngày đã sản xuất được 130 sản phẩm nên đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn 2 ngày. Hỏi xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm ?

Giải

$$\begin{aligned} 1. a) (x + 3)^2 - 25 &= 0 &\Leftrightarrow (x + 3 + 5)(x + 3 - 5) &= 0 \\ &&\Leftrightarrow x + 8 = 0 \text{ hoặc } x - 2 &= 0 \\ &&\Leftrightarrow x = -8 \text{ hoặc } x = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ ĐKXD : } x + 5 &\neq 0 \text{ và } x - 5 \neq 0 &\Leftrightarrow x \neq \pm 5 \\ &&(25 - x^2 = (5 - x)(5 + x) \neq 0) \end{aligned}$$

$$\text{MTC : } 2(x + 5)(x - 5) = 2(x^2 - 25)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x+10} + \frac{2x}{25-x^2} + \frac{3}{x-5} &= 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{2(x+5)} - \frac{2x}{x^2-25} + \frac{3}{x-5} &= 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{2(x^2-25)} - \frac{4x}{2(x^2-25)} + \frac{6(x+5)}{2(x^2-25)} &= 0 \end{aligned}$$

Khử mẫu, ta được : $3x - 15 - 4x + 6x + 30 = 0$

$$\Leftrightarrow 5x = -15 \Leftrightarrow x = -3 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Tập nghiệm : $S = \{-3\}$.

c) ĐKXD : $x - 1 \neq 0$ và $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq 3$

$$(x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \neq 0)$$

$$\text{MTC : } (x - 1)(x - 3)$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức : } \frac{(x + 5)(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)} - \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{8}{(x - 1)(x - 3)}$$

$$\text{Khử mẫu : } (x + 5)(x - 3) - (x + 1)(x - 1) = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 5x - 15 - x^2 + 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Tập nghiệm : $S = \{11\}$.

2. Gọi x là số sản phẩm xí nghiệp phải sản xuất ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó, thời gian dự kiến phải hoàn thành kế hoạch là : $\frac{x}{120}$ (ngày)

Vì thực tế mỗi ngày làm được 130 sản phẩm nên số ngày đã làm $\frac{x}{130}$ (ngày).

Ta có phương trình :

$$\frac{x}{120} - \frac{x}{130} = 2 \Leftrightarrow 13x - 12x = 3120 \Leftrightarrow x = 3120 \text{ (nhận)}$$

Đáp số : Số sản phẩm là 3120.

ĐỀ SỐ 5

1. Giải phương trình :

a) $(x - 4)^3 = (x + 4)(x^2 - x - 16)$ (*)

b) $\frac{x + 2}{x} = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 2x} + \frac{x}{x + 2}$

c) $\frac{x + 1}{x - 2} - \frac{5}{x + 2} = \frac{12}{x^2 - 4} + 1$.

2. Số học sinh khá của khối lớp 8 bằng $\frac{5}{2}$ số học sinh giỏi. Nếu số học sinh giỏi thêm 10 học sinh và số học sinh khá giảm đi 6 học sinh thì số học sinh khá gấp hai lần số học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi của khối lớp 8.

Giải

1. a) (*) $\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = x^3 - x^2 - 16x + 4x^2 - 4x - 64$
 $\Leftrightarrow -15x^2 + 68x = 0 \Leftrightarrow x(-15x + 68) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } -15x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{68}{15}$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \left\{0; \frac{68}{15}\right\}.$$

$$\text{b) ĐKXD : } x \neq 0 \text{ và } x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ và } x \neq -2$$

$$(x^2 + 2x = x(x + 2) \neq 0)$$

$$\text{MTC : } x(x + 2)$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức : } \frac{(x + 2)^2}{x(x + 2)} = \frac{x^2 + 5x + 4}{x(x + 2)} + \frac{x^2}{x(x + 2)}$$

$$\text{Khử mẫu : } x^2 + 4x + 4 = x^2 + 5x + 4 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -1$$

$$x = 0 \text{ không thỏa ĐKXD. Tập nghiệm : } S \{-1\}.$$

$$\text{c) ĐKXD : } x - 2 \neq 0 \text{ và } x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ và } x \neq -2$$

$$(x^2 - 4x = (x - 2)(x + 2) \neq 0)$$

$$\text{MTC : } (x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$$

$$\text{Quy đồng mẫu thức : } \frac{(x + 1)(x + 2)}{x^2 - 4} - \frac{5(x - 2)}{x^2 - 4} = \frac{12}{x^2 - 4} + \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4}$$

$$\text{Khử mẫu, ta được : } x^2 + 3x + 2 - 5x + 10 = 12 + x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại)}$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \emptyset.$$

2. Gọi x là số học sinh giỏi ($x \in \mathbb{N}^*$) thì số học sinh khá sẽ là $\frac{5}{2}x$.

Thêm 10 học sinh giỏi nên có $x + 10$; giảm 6 học sinh khá nên có $\frac{5}{2}x - 6$.

$$\text{Ta có phương trình : } \frac{5}{2}x - 6 = 2(x + 10) \Leftrightarrow 5x - 12 = 4x + 40$$

$$\Leftrightarrow 5x - 4x = 40 + 12 \Leftrightarrow x = 52$$

Trả lời : Khối 8 có 52 học sinh giỏi.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải phương trình :

$$\text{a) } \frac{2x - 1}{x + 4} + \frac{3x - 1}{x - 4} = 5 + \frac{96}{x^2 - 16}$$

$$b) \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{1}{8x-16} = \frac{7}{8x} + \frac{5-x}{4x^2-8x}$$

$$c) \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{3x^2}{x^3-1}$$

$$d) \frac{1}{x-5} - \frac{3}{x^2-6x+5} = \frac{5}{x-1}$$

$$e) \frac{x+9}{x^2-3x-10} - \frac{x+15}{x^2-25} = \frac{1}{x+2}$$

2. Chu vi của hình vuông lớn hơn chu vi hình vuông nhỏ là 32m; diện tích hình vuông lớn hơn diện tích hình vuông nhỏ là 464m². Tính cạnh của hình vuông nhỏ.
3. Một xe vận tải đi từ A đến B với vận tốc 50km/h. Đi được 24 phút thì gặp đường khó đi nên vận tốc trên quãng đường còn lại là 40km/h nên đến nơi so với dự định chậm 18 phút. Tính quãng đường AB.
4. Cho một lượng dung dịch chứa 10% muối. Nếu pha thêm 200g nước thì được một dung dịch 6%. Hỏi có bao nhiêu gam dung dịch đã cho?
5. Hai người định làm chung trong 12 ngày thì hoàn thành một công việc, nhưng chỉ làm chung trong 8 ngày thì người thứ nhất chuyển đi làm việc khác, nên người thứ hai phải làm 5 ngày nữa mới xong. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì bao lâu mới xong?

Hướng dẫn

1. a) $S = \{8\}$

b) Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq 0$ và $x \neq 2$

c) $S = \emptyset$

b) $S = \left\{ \frac{21}{4} \right\}$

e) $S = \{-8\}$.

2. 25m

3. 80km

4. 300g.

5. Gọi x là thời gian người thứ hai làm xong công việc. Một ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{x}$ công việc nên 5 ngày làm được $\frac{5}{x}$ công việc.

Hai người 8 ngày làm được $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ công việc, vậy còn lại $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ công việc mà người thứ hai phải làm trong 5 ngày.

Ta có phương trình: $\frac{5}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 15$

Một ngày người thứ nhất làm được: $\frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60}$ công việc

Đáp số: 15 ngày và 60 ngày.

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$; nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$.
- Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$; nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. So sánh :

a) m và $m + 1$

b) m và n ; biết $m - n = 1$.

2. Chứng tỏ rằng :

a) Nếu $m > n$ thì $m - n > 0$

b) Nếu $m - n > 0$ thì $m > n$.

3. Cho $x + 5 \leq y + 5$. So sánh x và y .

Giải

1. a) Ta có : $1 > 0 \Rightarrow m + 1 > m + 0$ hay $m + 1 > m$.

b) Ta có : $m - n = 1 \Rightarrow m = n + 1$

Theo câu a) : $n + 1 > n$. Vậy $m > n$.

2. a) $m > n \Rightarrow m - n > n - n \Rightarrow m - n > 0$ (đpcm).

b) $m - n > 0 \Rightarrow m - n + n > 0 + n \Rightarrow m > n$ (đpcm).

3. Ta có : $x + 5 \leq y + 5 \Rightarrow x + 5 - 5 \leq y + 5 - 5 \Rightarrow x \leq y$.

ĐỀ SỐ 2

1. a) Cho $x > y$. Chứng minh : $x + y > 2y$.

b) Cho $x - y = 3$. Chứng minh : $x > y$.

2. a) Chứng minh : $(x + y)^2 \geq 4xy$.

b) Cho $xy = 1$. Chứng minh : $(x + y)^2 \geq 4$.

Giải

1. a) Ta có : $x > y \Rightarrow x + y \geq y + y$ hay $x + y > 2y$.

b) Ta có : $x - y = 3 \Rightarrow x = y + 3$.

Lại có : $3 > 0 \Rightarrow y + 3 > y + 0$

$\Rightarrow y + 3 > y$ hay $x > y$.

$$\begin{aligned}
2. \text{ a) Ta luôn có : } (x - y)^2 &\geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\
&\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 4xy \geq 4xy \\
&\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\
&\Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy.
\end{aligned}$$

b) Theo chứng minh trên : $(x + y)^2 \geq 4xy$.

$$\text{Khi } xy = 1 \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4.1 \text{ hay } (x + y)^2 \geq 4.$$

ĐỀ SỐ 3

1. a) Chứng minh : $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

b) Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh : $(x + y)^2 \leq 2$.

2. So sánh x và y, biết $x - 3 < y - 3$.

3. So sánh x và y, biết $x - y = 5$.

Giải

$$1. \text{ a) Ta có : } (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \geq 2ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \text{ (đpcm).}$$

b) Theo trên, ta có : $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

$$\text{Khi } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x + y)^2 \leq 2.1 \text{ hay } (x + y)^2 \leq 2.$$

$$2. \text{ Ta có : } x - 3 < y - 3 \Rightarrow x - 3 + 3 < y - 3 + 3 \Rightarrow x < y.$$

$$3. x - y = 5 \Rightarrow x = y + 5.$$

$$\text{Lại có : } 5 > 0 \Rightarrow y + 5 > y + 0 \Rightarrow y + 5 > y \text{ hay } x > y.$$

ĐỀ SỐ 4

1. a) Chứng minh : $(2x + y)^2 \leq 5(x^2 + y^2)$.

b) Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng tỏ : $(2x + y)^2 \leq 5$.

2. Chứng minh : $x + 2010 > x + 2009$.

3. Cho $a > b$. Chứng minh : $2a + b > a + 2b$.

Giải

$$1. \text{ a) Ta có : } (2x + y)^2 \leq 5(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 \leq 5x^2 + 5y^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x^2 - y^2 \leq 5x^2 + 5y^2 - 4x^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow 4xy \leq x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow 4xy - 4xy \leq x^2 + 4y^2 - 4xy$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x - 2y)^2 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Khi $x^2 + y^2 = 1$. Thay vào bất đẳng thức đã chứng minh ở câu a)

$$\Rightarrow (2x + y)^2 \leq 5.1 \text{ hay } (2x + y)^2 \leq 5.$$

2. Ta có : $2010 > 2009 \Rightarrow x + 2010 > x + 2009.$

3. Ta có : $a > b \Rightarrow a + a > b + a$

$$\Rightarrow 2a > b + a$$

$$\Rightarrow 2a + b > b + a + b \text{ hay } 2a + b > a + 2b.$$

ĐỀ SỐ 5

1. Chứng minh : $x(x + 2) < (x + 1)^2$.

2. Cho $a > b$. Chứng tỏ : $3a > 2a + b$.

3. Chứng minh : $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

Giải

1. Ta có : $x(x + 2) < (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - x^2 - 2x < x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 \text{ (luôn đúng).}$$

2. Ta có : $a > b \Rightarrow a + 2a > b + 2a \Rightarrow 3a > 2a + b.$

3. Ta có : $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow -2ab \leq a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab - 2ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \text{ hay } 0 \leq (a + b)^2 \text{ (luôn đúng).}$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Chứng minh rằng nếu $a + 4b = 1$ thì $5(a^2 + 4b^2) \geq 1$.

2. Chứng minh rằng $x + y = 1$ thì $2(x^2 + y^2) \geq 1$.

3. Cho $a = b + 1$. Chứng minh $a > b$.

4. Chứng minh rằng : $(x + 1)^2 \geq 4x$.

5. Chứng minh : $x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x + y)$.

6. Chứng minh : $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 9 \geq 0$.

Hướng dẫn

1. $a + 4b = 1 \Rightarrow a = 1 - 4b$

Thay vào bất đẳng thức : $5[(1 - 4b)^2 + 4b^2] \geq 1$

$$\Leftrightarrow 100b^2 - 40b + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (10b - 2)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

2. Tương tự bài 1.

3. $b + 1 > b \Rightarrow a > b.$

4. $(x + 1)^2 \geq 4x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x$
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

5. $x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x + y) \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

6. $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 9 = (x + y)^2 + (y + 3)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

§2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

$$a < b \text{ và } c > 0 \Rightarrow ac < bc.$$

- Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

$$a < b \text{ và } c < 0 \Rightarrow ac > bc.$$

- Tính chất bắc cầu : $a < b$ và $b < c \Rightarrow a < c.$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Cho $m > n$. Chứng minh : $2m - 3 > 2n - 4.$

2. Cho $m > 1$. Chứng minh : $m^2 - m > 0.$

3. Cho $a > b > 0$. Chứng minh : $a^2 > b^2.$

Giải

1. Ta có : $m > n \Rightarrow 2m > 2n \Rightarrow 2m - 3 > 2n - 3$

Lại có : $-3 > -4 \Rightarrow 2n - 3 > 2n - 4$

Theo tính chất bắc cầu :

$$2m - 3 > 2n - 3 > 2n - 4 \Rightarrow 2m - 3 > 2n - 4.$$

2. $m > 1 > 0 \Rightarrow m^2 > m \Rightarrow m^2 - m > 0$ (đpcm).

3. $a > b > 0 \Rightarrow a > 0$ và $b > 0.$

Ta có : $a > b \Rightarrow a^2 > ab;$

$a > b \Rightarrow ab > b^2.$

Vậy $a^2 > ab > b^2 \Rightarrow a^2 > b^2.$

ĐỀ SỐ 2

1. Cho $a < b$. Chứng minh : $2 - 3a > 1 - 3b$.
2. Cho $m > 0$ và $m < 1$. Chứng minh : $m^2 < m$.
3. Cho $2x + 1 < 2y + 1$. So sánh x và y .

Giải

1. $a < b \Rightarrow -3a > -3b \Rightarrow 2 - 3a > 2 - 3b$
Lại có : $2 > 1 \Rightarrow 2 - 3b > 1 - 3b$
Theo tính chất bắc cầu: $2 - 3a > 2 - 3b$; $2 - 3b > 1 - 3b$
 $\Rightarrow 2 - 3a > 1 - 3b$.
2. Vì $m < 1$ và $m > 0 \Rightarrow m.m < 1.m$ hay $m^2 < m$.
3. $2x + 1 < 2y + 1 \Rightarrow 2x + 1 - 1 < 2y + 1 - 1$
 $\Rightarrow 2x < 2y \Rightarrow \frac{1}{2}.2x < \frac{1}{2}.2y \Rightarrow x < y$.

ĐỀ SỐ 3

1. Cho $a < b$ và $c < d$. Chứng minh : $a + c < b + d$.
2. Cho $a > 0$ và $b > 0$. Chứng minh : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
3. Cho $0 < a < b$ và $c > 0$. Chứng minh : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

Giải

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$; $c < d \Rightarrow c + b < b + d$
Vậy $a + c < b + c < b + d \Rightarrow a + c < b + d$.
2. Ta có : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} . ab \geq 2ab$
 $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$
 $\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 2ab - 2ab$
 $\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ (luôn đúng).
3. Ta có : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{b} < \frac{a+c}{b+c} . (b+c)$ (vì $b+c > 0$)
 $\Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{b} . b < (a+c).b$ (vì $b > 0$)
 $\Leftrightarrow ab + ac < ab + bc$
 $\Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow a < b$ (vì $c > 0$).

ĐỀ SỐ 4

1. Cho a, b, c, d dương và $a > b$ và $c > d$. Chứng minh : $ac > bd$.

2. Chứng minh : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

3. Cho $x > 0; y > 0$. Chứng minh : $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$.

Giải

1. Ta có : $a > b$ và $c > 0 \Rightarrow ac > bc$.

Ta có : $c > d$ và $b > 0 \Rightarrow bc > bd$

Vậy : $ac > bc > bd \Rightarrow ac > bd$.

2. Ta có : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leq 2(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2-2ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 \text{ (luôn đúng).}$$

3. Ta có : $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y \cdot \frac{1}{y} \geq 4$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \text{ (vì } x > 0, y > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

ĐỀ SỐ 5

1. Cho $a > b > 0$. Chứng minh : $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

2. a) Cho $1-2a \geq 1-2b$. So sánh a và b .

b) Cho $4a > 2a$. Chứng tỏ $a > 0$.

3. Cho $a > b$. Chứng minh : $2(1-a) < 2(1-b)$.

Giải

1. Vì $a > 0$ và $b > 0 \Rightarrow ab > 0$.

Ta có : $a > b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab}$ hay $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ (đpcm).

$$2. a) \text{ Ta có : } 1 - 2a > 1 - 2b \Rightarrow -2a > -2b$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(-2a) < \left(-\frac{1}{2}\right)(-2b) \text{ hay } a < b.$$

$$b) \text{ Ta có : } 4a > 2a \Rightarrow 4a - 2a > 2a - 2a \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow a > 0.$$

$$3. \text{ Ta có : } a > b \Rightarrow -a < -b \Rightarrow 1 - a < 1 - b \\ \Rightarrow 2(1 - a) < 2(1 - b).$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

$$1. \text{ Chứng minh : } a < 0, b < 0 \text{ và } a > b \text{ thì } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

$$2. \text{ Cho } a > 0, b > 0. \text{ Chứng minh : } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

$$3. \text{ Chứng minh : } a^2 + \frac{1}{4} \geq a.$$

$$4. \text{ Cho } a, b, c \text{ dương và } a > b. \text{ Chứng minh : } \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}.$$

$$5. \text{ Cho } a \geq 2; b \geq 2. \text{ Chứng minh : } ab \geq a + b.$$

$$6. \text{ Cho } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}; b > 0; d > 0. \text{ Chứng minh : } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

$$7. \text{ Cho } a + b \geq 0. \text{ Chứng minh : } a^3 + b^3 \geq ab(a + b).$$

$$8. \text{ Cho } x > 0. \text{ Chứng minh : } x + \frac{1}{x} \geq 2. \text{ Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của} \\ \text{biểu thức } x + \frac{1}{x}.$$

Hướng dẫn

$$1. a < 0; b < 0 \text{ và } a > b \Rightarrow \frac{a}{a} < \frac{a}{b} \text{ hay } 1 < \frac{b}{a}. \quad \text{Vì } b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}.$$

$$2. \text{ Vì } a > 0; b > 0 \text{ nên : } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ (xem đề số 3).}$$

$$3. a^2 + \frac{1}{4} \geq a \Leftrightarrow 4a^2 + 1 \geq 4a \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (2a - 1)^2 \geq 0.$$

$$4. \text{ Tương tự đề số 3.}$$

$$5. a \geq 2 \text{ và } b > 0 \Rightarrow ab \geq 2b. \text{ Tương tự } ab \geq 2a$$

Cộng vế với vế hai bất đẳng thức cùng chiều (xem đề số 3).

$$2ab \geq 2(a + b) \Rightarrow ab \geq a + b.$$

6. Xem đề số 3.

$$\begin{aligned} 7. \quad a^3 + b^3 \geq ab(a + b) &\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b) \\ &\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$8. \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra khi $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

§3. Bất phương trình một ẩn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của bất phương trình.
- Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Viết và biểu diễn tập nghiệm trên trục số của bất phương trình.

a) $x < 1$

b) $x \geq 1$.

2. Cho bất phương trình : $|x - 1| \leq 3$.

Số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình : -3; -1; 4; 5.

3. Hai bất phương trình sau có tương đương không : $x > 2$ và $x^2 > 4$.

Giải

1. a) Tập nghiệm : $S = \{x \mid x < 1\}$.

Biểu diễn trên trục số :

b) Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \geq 1\}$.

Biểu diễn trên trục số :

2. $|-3 - 1| = |-4| = 4 \leq 3$ (sai).

Vậy $x = -3$ không là nghiệm của bất phương trình.

Tương tự : $x = -1$; $x = 4$ là nghiệm; $x = 5$ không là nghiệm của bất phương trình.

3. Ta thấy : $x = -3 \Rightarrow x^2 = 9 > 4$.

Vậy $x = -3$ là một nghiệm của bất phương trình $x^2 > 4$, nhưng $x = -3$ không là nghiệm của bất phương trình $x > 2$.

Hai bất phương trình không tương đương.

ĐỀ SỐ 2

1. Viết và biểu diễn tập nghiệm trên trục số của bất phương trình.

a) $x \leq 0$

b) $x > \frac{1}{2}$

2. Viết tập nghiệm của bất phương trình : $x^2 + 1 < 0$.

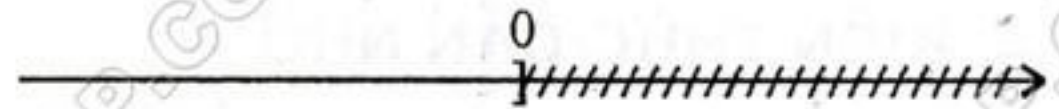
3. Hai bất phương trình sau có tương đương không ?

$x > 1$ (1) và $x^2 + 1 < 0$ (2)

Giải

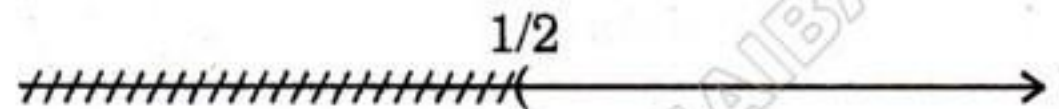
1. a) Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \leq 0\}$.

Biểu diễn trên trục số :



b) Tập nghiệm : $S = \left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$.

Biểu diễn trên trục số :



2. Vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$.

Vậy $x^2 + 1 < 0$ không thỏa mãn với bất cứ giá trị nào của x .

Ta có tập nghiệm : $S = \emptyset$.

3. Theo câu 2., bất phương trình $x^2 + 1 < 0$ (2) : vô nghiệm.

Bất phương trình (1) có một nghiệm, chẳng hạn : $x = 2 \notin \emptyset$.

Vậy hai bất phương trình không tương đương.

ĐỀ SỐ 3

1. Hãy tìm một số tự nhiên là nghiệm của bất phương trình $3x + 2 \geq 0$ mà không phải là nghiệm của bất phương trình $4 - 2x \leq 0$.

2. Hai bất phương trình sau có tương đương không ?

$x^2 \leq 9$ (1) và $x < 3$ (2).

3. Chứng minh bất phương trình sau vô nghiệm : $x^2 - 2x < -3$.

Giải

1. Với $x = 1$ ta có : $3.1 + 2 = 5 \geq 0$ (đúng); $4 - 2.1 = 2 \leq 0$ (sai).

2. Lấy $x = -5 \Rightarrow x^2 = 25 > 9$ nên $x = -5$ không là nghiệm của (1) nhưng $x = -5$ là nghiệm của (2).

Vậy hai bất phương trình không tương đương.

3. $x^2 - 2x < -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2 < 0$

Vì $(x - 1)^2 \geq 0$ với mọi $x \Rightarrow (x - 1)^2 + 2 > 0$ với mọi x

\Rightarrow Bất phương trình đã cho vô nghiệm.

ĐỀ SỐ 4

1. Chứng minh rằng nếu $x > 0$ thì $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} > 0$.

2. Chứng minh bất phương trình sau vô nghiệm :

$$x^2 - 2x + 3 < -2x + 3.$$

3. Chứng tỏ hai bất phương trình sau là tương đương ?

$$2x^2 - 6 \geq 4 \quad \text{và} \quad x^2 - 5 \geq 0.$$

Giải

$$1. \text{ Ta có : } \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x}{x(x+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} > 0 \text{ luôn đúng với } x > 0.$$

$$2. \quad x^2 - 2x + 3 < -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 + 2x - 3 < -2x + 3 + 2x - 3 \\ \Leftrightarrow x^2 < 0$$

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi x nên $x^2 < 0$ vô nghiệm.

$$3. \quad 2x^2 - 6 \geq 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 6 - 4 \geq 4 - 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 10 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 10}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 \geq 0.$$

ĐỀ SỐ 5

1. Chứng tỏ hai bất phương trình tương đương :

$$x^2 + 2x + 5 \geq 3x + x^2 - 7 \quad \text{và} \quad x - 12 \leq 0.$$

2. Chứng tỏ bất phương trình sau luôn nghiệm đúng với mọi x :

$$x^2 - 4x + 5 > 0.$$

3. Chứng minh rằng nếu $x < 0$ thì $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} < 0$.

Giải

$$1. \quad x^2 + 2x + 5 \geq 3x + x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2x - 2x + 5 - 5 \geq 3x - 2x + x^2 - x^2 - 7 - 5 \\ \Leftrightarrow 0 \geq x - 12 \text{ hay } x - 12 \leq 0.$$

$$2. \text{ Ta có : } x^2 - 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 \geq 0$$

Luôn nghiệm đúng với mọi x vì $(x-2)^2 \geq 0$ luôn nghiệm đúng với mọi x .

$$3. \text{ Ta có: } \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-x}{x(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x(x-1)} < 0$$

$$\text{Vì } x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 < 0 \Rightarrow x(x-1) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x(x-1)} < 0 \text{ với } x < 0.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Chứng tỏ hai bất phương trình sau tương đương.

a) $x^3 - 2x^2 - 1 \leq x^2 + x + 1$ và $x^3 - 3x^2 - x - 2 \leq 0$.

b) $3x^2 - 5x - 1 > x^2 + x + 1$ và $x^2 - 3x - 1 > 0$.

2. Chứng minh : a) Nếu $x + y = 1$ thì $x^3 + y^2 \geq \frac{1}{4}$.

b) Nếu $4x + y = 1$ thì $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$.

3. Chứng minh bất phương trình sau vô nghiệm :

a) $x^2 + 2x < 2x - 1$

b) $x^2 + 2x + 2 \leq 0$

c) $4x^2 - 4x + 5 \leq 0$

d) $(x+2)^2 > 2x(x+2) + 4$.

Hướng dẫn

1. a) $x^3 - 2x^2 - 1 \leq x^2 + x + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 - 1 - 1 - x \leq x^2 - x^2 - 1 - x + x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x - 2 \leq 0.$$

b) $3x^2 - 5x - 1 > x^2 + x + 1$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - x^2 - 5x - x - 1 - 1 > x^2 - x^2 + x - x + 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 > 0.$$

2. a) Ta có : $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$$\text{Vậy } x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3x + 1 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3(4x^2 - 4x + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow 3(2x-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

b) Tương tự a).

$$\begin{aligned}
 3. \quad a) \quad x^2 + 2x < 2x - 1 &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2x + 1 < 2x - 2x - 1 + 1 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 1 < 0 \text{ (không thỏa mãn } \forall x \text{ vì } x^2 \geq 0). \\
 b) \quad x^2 + 2x + 2 \leq 0 &\Leftrightarrow (x + 1)^2 + 1 \leq 0. \\
 c) \quad 4x^2 - 4x + 5 \leq 0 &\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + 4 \leq 0.
 \end{aligned}$$

§4. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Bất phương trình bậc nhất một ẩn :
 $ax + b < 0$ hoặc $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$ ($a \neq 0$).
- Quy tắc chuyển vế : Khi chuyển vế một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải đổi dấu hạng tử đó.
- Quy tắc nhân với một số : Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải :
 - Giữ nguyên chiều bất đẳng thức nếu số đó dương.
 - Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

1. Giải bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

$$a) (x + 3)^2 - 10 \geq (x + 3)(x + 2) - 4 \quad (1)$$

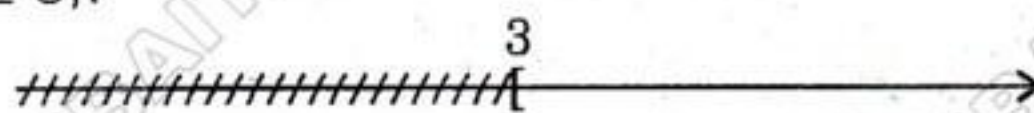
$$b) \frac{x - 2}{18} - \frac{2x + 5}{12} > \frac{x + 6}{9} - \frac{x - 3}{6} \quad (2)$$

2. Tìm x, sao cho : $(x - 1)(x - 2) > 0$.

Giải

$$\begin{aligned}
 1. \quad a) \quad (1) &\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 10 \geq x^2 + 3x + 2x + 6 - 4 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 6x - 3x - 2x \geq -9 + 10 + 6 - 4 \\
 &\Leftrightarrow x \geq 3
 \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \geq 3\}$.

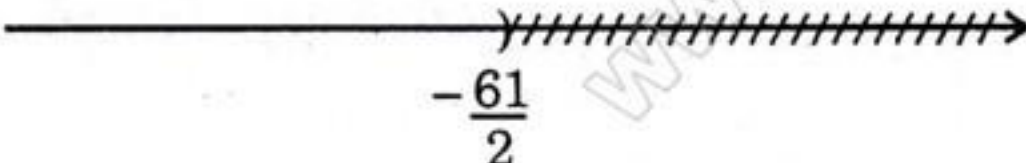
Biểu diễn trên trục số : 

$$\begin{aligned}
 b) \quad (2) &\Leftrightarrow \frac{2(x - 2)}{36} - \frac{3(2x + 5)}{36} > \frac{4(x + 6)}{36} - \frac{6(x - 3)}{36} \\
 &\Leftrightarrow 2x - 4 - 6x - 15 > 4x + 24 - 6x + 18
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6x - 4x + 6x > 4 + 15 + 24 + 18$$

$$\Leftrightarrow -2x > 61 \Leftrightarrow x < -\frac{61}{2}$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \left\{ x \mid x < -\frac{61}{2} \right\}.$$

Biểu diễn trên trục số : 

$$2. \text{ Trường hợp 1 : } x - 1 > 0 \text{ và } x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ và } x > 2$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{Trường hợp 2 : } x - 1 < 0 \text{ và } x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ và } x < 2$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

Vậy $x > 2$ hoặc $x < 1$. Tập nghiệm : $S = \{x \mid x < 1 \text{ hoặc } x > 2\}$.

ĐỀ SỐ 2

1. Giải bất phương trình :

$$a) (x + 2)^2 - 6(x + 2) > x^2 - 4 \quad (1)$$

$$b) \frac{3x - 5}{8} + \frac{1 - 5x}{4} < \frac{1}{2} \quad (2)$$

2. Tìm x, sao cho : $(x - 1)(x + 2) < 0$.

Giải

$$1. a) (1) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 6x - 12 > x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 4x - 6x > -4 + 12 - 4$$

$$\Leftrightarrow -2x > 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{-2} \Leftrightarrow x < -2$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x < -2\}$.

$$b) (2) \Leftrightarrow \frac{3x - 5}{8} + \frac{2(1 - 5x)}{8} < \frac{4}{8}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 + 2 - 10x < 4 \Leftrightarrow -7x < 5 - 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow -7x < 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{-7} \Leftrightarrow x > -1$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x > -1\}$.

$$2. \text{ Trường hợp 1 : } x - 1 > 0 \text{ và } x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ và } x < -2 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Trường hợp 2 : } x - 1 < 0 \text{ và } x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ và } x > -2$$

Vậy $-2 < x < 1$.

ĐỀ SỐ 3

1. Giải bất phương trình :

$$a) \frac{1-4x}{12} < \frac{5-3x}{9} \quad (1)$$

$$b) (x-1)^2 + 4 \geq (x+1)^2 \quad (2)$$

2. Tìm x, sao cho : $(x^2 + 2x + 4)(x-1) \leq 0$ (3).

Giải

$$1. a) (1) \Leftrightarrow \frac{3(1-4x)}{36} < \frac{4(5-3x)}{36} \Leftrightarrow 3-12x < 20-12x$$

$$\Leftrightarrow -12x + 12x < -3 + 20$$

$$\Leftrightarrow 0x < 17 \text{ luôn đúng với mọi } x$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

$$b) (2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4 \geq x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 - 2x - 2x \geq -1 - 4 + 1$$

$$\Leftrightarrow -4x \geq -4 \Leftrightarrow x \leq \frac{-4}{-4} \Leftrightarrow x \leq 1$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \leq 1\}$.

2. Ta thấy : $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$, với mọi x.

$$\text{Vậy } (3) \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

ĐỀ SỐ 4

1. Giải bất phương trình :

$$a) \frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} \geq 1 + \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$b) 9x^2 + 4x - 3 - (3x+2)^2 > 0 \quad (2)$$

2. Tìm x sao cho : $\frac{x-3}{x+4} < 0$.

Giải

$$1. a) (1) \Leftrightarrow \frac{6(x+1)}{12} + \frac{4(x+2)}{12} + \frac{3(x+3)}{12} \geq \frac{12}{12} + \frac{6x}{12}$$

$$\Leftrightarrow 6x + 6 + 4x + 8 + 3x + 9 \geq 12 + 6x$$

$$\Leftrightarrow 7x \geq -23 + 12 \Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{7}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{x \mid x \geq -\frac{11}{7}\right\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) (2)} & \Leftrightarrow 9x^2 + 4x - 3 - (9x^2 + 12x + 4) > 0 \\
 & \Leftrightarrow 9x^2 + 4x - 3 - 9x^2 - 12x - 4 > 0 \\
 & \Leftrightarrow -8x > 7 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{8} \Leftrightarrow x < -\frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \left\{ x \mid x < -\frac{7}{8} \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{2. Trường hợp 1 : } x - 3 < 0 \text{ và } x + 4 > 0 & \Leftrightarrow x < 3 \text{ và } x > -4 \\
 & \Leftrightarrow -4 < x < 3
 \end{aligned}$$

$$\text{Trường hợp 2 : } x - 3 > 0 \text{ và } x + 4 < 0 \Leftrightarrow x > 3 \text{ và } x < -4 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy } -4 < x < 3.$$

ĐỀ SỐ 5

1. Giải bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

$$\text{a) } \frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x \quad (1)$$

$$\text{b) } (x-3)^2 + 2(x-1) \leq x^2 + 3 \quad (2)$$

2. Với giá trị nào của x, các biểu thức sau âm :

$$\text{a) } -\frac{2}{3x-12}$$

$$\text{b) } \frac{25-15x}{3}$$

Giải

$$\text{1. a) (1)} \Leftrightarrow 3(3x+5) - 6 \leq 2(x+2) + 6x$$

$$\Leftrightarrow 9x + 15 - 6 \leq 2x + 4 + 6x$$

$$\Leftrightarrow 9x - 2x - 6x \leq -15 + 6 + 4 \Leftrightarrow x \leq -5$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \{x \mid x \leq -5\}.$$

$$\text{Biểu diễn trên trục số : } \xrightarrow{\hspace{10em} \overbrace{\hspace{10em}}^{-5} \hspace{1em} \text{//////////} \hspace{1em} \rightarrow}$$

$$\text{b) (2)} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 2x - 2 \leq x^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - x^2 \leq -9 + 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow -4x \leq -4 \Leftrightarrow x \geq \frac{-4}{-4} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \{x \mid x \geq 1\}.$$

$$\text{Biểu diễn tập nghiệm : } \xrightarrow{\hspace{10em} \text{//////////} \hspace{1em} \overbrace{\hspace{1em}}^1 \hspace{1em} \rightarrow}$$

$$\text{2. a) } -\frac{2}{3x-12} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{3x-12} < 0 \Leftrightarrow 3x - 12 > 0 \text{ (vì } -2 < 0)$$

$$\Leftrightarrow 3x > 12 \Leftrightarrow x > \frac{12}{3} \Leftrightarrow x > 4.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{25 - 15x}{3} < 0 &\Leftrightarrow 25 - 15x < 0 \Leftrightarrow -15x < -25 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{-25}{-15} \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải bất phương trình :

$$\text{a) } \frac{5x - 2}{4} > \frac{1 - 2x}{12}$$

$$\text{b) } \frac{1 - 4x}{12} < \frac{5 - 3x}{9}$$

$$\text{c) } (x - 1)(x + 2) < (x + 4)^2 - 4$$

$$\text{d) } \frac{x - 1}{x + 2} < 0.$$

$$\text{e) } (x + 2)(x - 1) > 0$$

$$\text{g) } \frac{x + 9}{x - 1} > 5$$

$$\text{h) } \frac{-3x + 1}{2x + 1} < -2$$

$$\text{i) } x^2 - \frac{x(2x + 3)}{2} < \frac{x - 1}{4}.$$

2. Chứng minh rằng $\frac{-x^2 + 4x - 10}{x^2 + 1} < 0$ (*) với mọi x.

3. Tìm x để biểu thức $x^2 - 4x + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

$$\text{1. a) } S = \left\{ x \mid x > \frac{7}{17} \right\}$$

$$\text{b) } S = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$

$$\text{c) } S = \{x \mid x > 2\}$$

$$\text{d) } S = \{x \mid -2 < x < 1\}$$

$$\text{e) } S = \{x \mid x < -2 \text{ hoặc } x > 1\}$$

$$\text{g) } \frac{x + 9}{x - 1} > 5 \Leftrightarrow \frac{x + 9}{x - 1} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{-4x + 14}{x - 1} > 0$$

$$S = \left\{ x \mid 1 < x < \frac{7}{2} \right\}.$$

$$\text{h) } \frac{-3x + 1}{2x + 1} < -2 \Leftrightarrow \frac{-3x + 1}{2x + 1} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x + 3}{2x + 1} < 0$$

$$S = \left\{ x \mid -3 < x < -\frac{1}{2} \right\}.$$

$$\text{i) } S = \left\{ x \mid x > \frac{1}{7} \right\}.$$

$$\text{2. Vì } x^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x \text{ nên (*)} \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) - 6 < 0 \Leftrightarrow -(x - 2)^2 - 6 < 0 \text{ luôn đúng}$$

$$(\text{vì } (x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow -(x - 2)^2 - 6 < 0, \text{ với mọi } x).$$

3. Ta có : $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x^2 - 4x + 5$ bằng 1.

Dấu "=" xảy ra khi $x - 2 = 0$ hay $x = 2$.

§5. Phương trình chứa giá trị tuyệt đối

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Giải phương trình :

1. $|x + 2| = 2(3 - x)$ (1)

2. $|3x - 2| + x = 11$ (2)

Giải

1. Trường hợp 1 : $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x + 2 = 2(3 - x) \Leftrightarrow x + 2 = 6 - 2x$

$\Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ (nhận)

Trường hợp 2 : $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow -(x + 2) = 2(3 - x) \Leftrightarrow -x - 2 = 6 - 2x$

$\Leftrightarrow x = 8$ (loại)

Vậy tập nghiệm : $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

2. Trường hợp 1 : $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 3x - 2 + x = 11 \Leftrightarrow 4x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}$ (nhận)

Trường hợp 2 : $3x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow -(3x - 2) + x = 11 \Leftrightarrow -3x + 2 + x = 11$

$\Leftrightarrow -2x = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$ (nhận)

Tập nghiệm : $S = \left\{ -\frac{9}{2}; \frac{13}{4} \right\}$.

ĐỀ SỐ 2

Giải phương trình :

1. $|2x| = x + 3$ (1)

2. $|2x - 1| = 1 - 2x$ (2)

Giải

1. Trường hợp 1 : $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2x = x + 3 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận)

Trường hợp 2 : $2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow -2x = x + 3 \Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$ (nhận)

Tập nghiệm : $S = \{-1; 3\}$.

2. Trường hợp 1 : $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 2x - 1 = 1 - 2x \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (nhận)

Trường hợp 2 : $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow -(2x - 1) = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow -2x + 1 = 1 - 2x$ (luôn đúng với $x < \frac{1}{2}$).

Vậy các giá trị x thỏa mãn : $x \leq \frac{1}{2}$ đều nghiệm đúng phương trình.

Tập nghiệm : $S = \left\{x/x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

ĐỀ SỐ 3

Giải phương trình : 1. $|x + 1| = |x - 1|$ (1)

2. $4|x| = x^2 + 4$ (2)

Giải

1. Ta có : (1) $\Leftrightarrow |x + 1|^2 = |x - 1|^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = (x - 1)^2$
 $\Leftrightarrow (x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1 + x - 1)(x + 1 - x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tập nghiệm : $S = \{0\}$.

2. Trường hợp 1 : $x \geq 0$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 4x = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa điều kiện $x \geq 0$)

Trường hợp 2 : $x < 0$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó (2)} &\Leftrightarrow -4x = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa điều kiện } x < 0\text{)}\end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{-2; 2\}$.

ĐỀ SỐ 4

1. Giải phương trình :

$$\text{a) } |-2x| = 1 - x \quad (1) \qquad \text{b) } |-4x| = x^2 + 4 \quad (2)$$

2. Với các giá trị nào của x thì $|2x - 1| = 2x - 1$.

Giải

1. a) Trường hợp 1 : $-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó (1)} &\Leftrightarrow -2x = 1 - x \Leftrightarrow -2x + x = 1 \Leftrightarrow -x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa điều kiện } x \leq 0\text{)}\end{aligned}$$

Trường hợp 2 : $-2x < 0 \Rightarrow x > 0$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó (1)} &\Leftrightarrow -(-2x) = 1 - x \Leftrightarrow 2x + x = 1 \Leftrightarrow 3x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa điều kiện } x > 0\text{)}\end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$.

b) Vì $x^2 + 4 > 0$, với mọi x .

$$\begin{aligned}\text{Vậy } |-4x| = x^2 + 4 &\Leftrightarrow -4x = x^2 + 4 \text{ hoặc } -4x = -(x^2 + 4) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ hoặc } x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \text{ hoặc } (x - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 2\end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{-2; 2\}$.

2. Ta có : $|A| = A$, nếu $A \geq 0$.

$$\text{Vậy } |2x - 1| = 2x - 1, \text{ nếu } 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

ĐỀ SỐ 5

1. Giải phương trình :

$$\text{a) } |x - 7| = 2 \qquad \text{b) } |3x - 5| = |5 - 2x|.$$

2. Tìm các giá trị của x sao cho $4 - 5x = |5x - 4|$.

Giải

1. a) $|x - 7| = 2 \Leftrightarrow x - 7 = 2 \text{ hoặc } x - 7 = -2$
 $\Leftrightarrow x = 9 \text{ hoặc } x = 5$

Tập nghiệm : $S = \{9; 5\}$.

b) $|3x - 5| = |5 - 2x| \Leftrightarrow 3x - 5 = 5 - 2x \text{ hoặc } 3x - 5 = -(5 - 2x)$
 $\Leftrightarrow 5x = 10 \text{ hoặc } x = 0$
 $\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 0$

Tập nghiệm : $S = \{0; 2\}$.

2. Viết lại : $|5x - 4| = 4 - 5x \Leftrightarrow |5x - 4| = -(5x - 4)$

Ta biết $|A| = -A$ nên $A \leq 0$.

Vậy $5x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 5x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{5}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Giải phương trình :

a) $|x - 1| = 2$

b) $|x| - |x - 2| = 2$

c) $x^2 + 2|x| + 1 = 0$.

2. a) Với các giá trị nào của x thì $|2x - 3| = 3 - 2x$.

b) Với các giá trị nào của x thì $|1 - 2x| = 1 - 2x$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a) $A = |x| + |x - 2|$

b) $B = |x + 1| + |x + 3|$

c) $C = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$.

Hướng dẫn

1. a) $|x - 1| = 2 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 2 \quad S = \{3; -1\}$.

b) Xét dấu x và $x - 2$:

x	0	2
$x - 2$	-	0
	-	+

• Nếu $x \leq 0$: $|x| - |x - 2| = 2 \Leftrightarrow -(x) + (x - 2) = 2$ (vô nghiệm)

• Nếu $0 < x \leq 2$: $|x| - |x - 2| = 2 \Leftrightarrow x + (x - 2) = 2$

$\Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)

• Nếu $x > 2$: $|x| - |x - 2| = 2 \Leftrightarrow x - (x - 2) = 2$

$\Leftrightarrow 2 = 2$ (luôn đúng với $x > 2$)

Tập nghiệm : $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } x^2 + 2|x| + 1 = 0 &\Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| + 1 = 0 \\ &\text{(vô nghiệm vì } |x| \geq 0 \Rightarrow |x| + 1 \geq 1 > 0). \end{aligned}$$

2. a) Xem đề 4; 5. Đáp số: $x \leq \frac{3}{2}$.

b) Đáp số: $x \leq \frac{1}{2}$.

3. Ta có: $|a| + |b| \geq |a + b|$.

$$\begin{aligned} \text{Chứng minh: } |a| + |b| \geq |a + b| &\Leftrightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2|ab| + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow |ab| \geq ab \text{ (luôn đúng).} \end{aligned}$$

$$\text{a) } A = |x| + |x - 2| = |x| + |2 - x| \geq |x + 2 - x| = 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x \text{ và } 2 - x \text{ cùng dấu} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

$$\text{b) } B = |x + 1| + |x + 3|$$

$$= |x + 1| + |-x - 3| \geq |(x + 1) + (-x - 3)| = 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng 2.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1.$$

$$\text{c) } |x - 1| + |x - 2| = |x - 1| + |2 - x| \geq |x - 1 + 2 - x| = 1$$

$$|x - 1| + |x - 3| \geq 2; \quad |x - 3| + |x - 2| \geq 1$$

$$\Rightarrow 2(|x - 1| + |x - 2| + |x + 3|) \geq 4$$

$$\Rightarrow |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 2$$

Giá trị nhỏ nhất của C bằng 2. Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$.

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA MỘT TIẾT

ĐỀ SỐ 1

1. a) Cho $-3a > 2a$. Chứng tỏ a âm.

b) Cho $2x + y = 5$. Chứng tỏ $x^2 + y^2 \geq 5$.

2. Giải phương trình:

$$\text{a) } |x + 1| = 2x - 1$$

$$\text{b) } |x - 1| = |2x - 3|$$

3. Giải bất phương trình: $(x + 2)^2 - 4 \geq (x + 3)(x + 5) - x$.

4. Với giá trị nào của x thì $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

Giải

1. a) Ta có : $-3a > 2a \Rightarrow -3a - 2a > 0 \Rightarrow -5a > 0 \Rightarrow a < 0.$

b) Vì $2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2x$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } x^2 + y^2 &= x^2 + (5 - 2x)^2 = x^2 + 25 - 20x + 4x^2 \\ &= 5x^2 - 20x + 25 = 5(x^2 - 4x + 4) + 5 \\ &= 5(x - 2)^2 + 5 \geq 5\end{aligned}$$

Vì $(x - 2)^2 \geq 0$. (Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$; $y = 1$).

2. a) Trường hợp 1 : $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$

Vậy $|x + 1| = 2x - 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa điều kiện } x \geq -1).$$

Trường hợp 2 : $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$

Vậy $|x + 1| = 2x - 1 \Leftrightarrow -(x + 1) = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow -x - 1 = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (không thỏa điều kiện } x < -1)$$

Tập nghiệm : $S = \{2\}.$

b) $|x - 1| = |2x - 3| \Leftrightarrow x - 1 = 2x - 3 \text{ hoặc } x - 1 = -2x + 3$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{4}{3}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{2; \frac{4}{3}\right\}.$

3. Ta có : $(x + 2)^2 - 4 \geq (x + 3)(x + 5) - x$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4 \geq x^2 + 5x + 3x + 15 - x$$

$$\Leftrightarrow -3x \geq 15 \Leftrightarrow x \leq -5$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \leq -5\}.$

4. Trường hợp 1 : $x - 1 > 0$ và $x + 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ và $x > -1$

$$\Rightarrow x > 1.$$

Trường hợp 2 : $x - 1 < 0$ và $x + 1 < 0 \Rightarrow x < 1$ và $x < -1$

$$\Rightarrow x < -1.$$

Vậy $x > 1$ hoặc $x < -1$.

ĐỀ SỐ 2

1. Bỏ giá trị tuyệt đối và rút gọn : $|1 - x| + 2x - 3.$

2. Giải phương trình :

a) $|2x + 5| = |1 - 3x|$

b) $|4 - x| = 2x - 1.$

3. Giải bất phương trình :

$$\text{a) } (x+2)(x-1) < (x+3)^2 - 5 \quad \text{b) } 1 + \frac{2x+1}{3} > \frac{2x-1}{6}.$$

4. Chứng minh rằng nếu $a > b > 0$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = |x| + |1-x|$.

Giải

1. • Nếu $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Ta có : $|1-x| = 1-x$

$$\text{Vậy } |1-x| + 2x - 3 = 1-x + 2x - 3 = x - 2.$$

• Nếu $1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$. Ta có : $|1-x| = -(1-x) = x-1$

$$\text{Vậy } |1-x| + 2x - 3 = x-1 + 2x - 3 = 3x - 4.$$

$$\text{Ta thường viết như sau : } |1-x| + 2x - 3 = \begin{cases} x-2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 3x-4 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

2. a) Ta có : $|2x+5| = |1-3x|$

$$\Leftrightarrow 2x+5 = 1-3x \text{ hoặc } 2x+5 = -(1-3x)$$

$$\Leftrightarrow 5x = -4 \text{ hoặc } -x = -6 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \text{ hoặc } x = 6$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \left\{ -\frac{4}{5}; 6 \right\}.$$

b) Điều kiện : $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Khi đó, ta có : } |4-x| = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow 4-x = 2x-1 \text{ hoặc } 4-x = -(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow -3x = -5 \text{ hoặc } x = -4+1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ hoặc } x = -3$$

$$\text{Vì } x \geq \frac{1}{2} \text{ nên ta lấy } x = \frac{5}{3}. \text{ Tập nghiệm : } S = \left\{ \frac{5}{3} \right\}.$$

3. a) $(x+2)(x-1) < (x+3)^2 - 5 \Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 < x^2 + 6x + 9 - 5$

$$\Leftrightarrow x - 6x < 2 + 4 \Leftrightarrow -5x < 6 \Leftrightarrow x > -\frac{6}{5}$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \left\{ x \mid x > -\frac{6}{5} \right\}.$$

$$\text{b) } 1 + \frac{2x+1}{3} > \frac{2x-1}{6} \Leftrightarrow 6 + 2(2x+1) > 2x-1$$

$$\Leftrightarrow 6 + 4x + 2 > 2x - 1 \Leftrightarrow 2x > -9 \Leftrightarrow x > -\frac{9}{2}$$

$$\text{Tập nghiệm : } S = \left\{ x \mid x > -\frac{9}{2} \right\}.$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ Ta có : } \frac{1}{a} < \frac{1}{b} &\Leftrightarrow ab \cdot \frac{1}{a} < ab \cdot \frac{1}{b} \quad (\text{vì } a > 0; b > 0 \Rightarrow ab > 0) \\ &\Leftrightarrow b < a \quad (\text{luôn đúng theo giả thiết : } a > b). \end{aligned}$$

$$5. \text{ Ta có : } A = |x| + |1 - x| \geq |x + 1 - x| = 1$$

(Xem bài 3, phần C; §5. Phương trình có chứa giá trị tuyệt đối)

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 1.

Dấu "=" xảy ra, chẳng hạn $x = 0$.

($|a| + |b| = |a + b|$. Dấu "=" xảy ra khi a và b cùng dấu. Ở đây, ta chỉ cần tìm một giá trị của x là đủ).

ĐỀ SỐ 3

$$1. \text{ Chứng minh bất đẳng thức : } a^4 + 1 \geq a(a^2 + 1)$$

$$2. \text{ Giải bất phương trình :}$$

$$a) (x + 1)(2x - 2) - 3 > -5x - (2x + 1)(3 - x) \quad (1)$$

$$b) (x - 3)^2 + 4(2 - x) > x(x + 7) \quad (2)$$

$$3. \text{ Giải phương trình :}$$

$$a) |x - 1| = |3 - 2x| \quad b) |-4x| + 3x = 1.$$

$$4. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : } A = |2 - x| + 3.$$

Giải

$$1. \text{ Ta có : } a^4 + 1 \geq a(a^2 + 1) \Leftrightarrow a^4 + 1 \geq a^3 + a$$

$$\Leftrightarrow a^4 - a^3 + 1 - a \geq 0 \Leftrightarrow a^3(a - 1) - (a - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 + a + 1) \geq 0$$

$$\text{Ta thấy : } a^2 + a + 1 = a^2 + 2a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$\text{vì } \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ với mọi } a.$$

$$\text{Vậy } (a - 1)^2(a^2 + a + 1) \geq 0 \text{ với mọi } a.$$

$$2. a) (1) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2x - 2 - 3 > -5x - (6x - 2x^2 + 3 - x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5 \geq -5x - 6x + 2x^2 - 3 + x$$

$$\Leftrightarrow 10x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{ x \mid x \geq \frac{1}{5} \right\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) (2)} \quad &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 8 - 4x > x^2 + 7x \\ &\Leftrightarrow -17x > -17 \quad \Leftrightarrow x < \frac{-17}{-17} \quad \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x < 1\}$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) } |x - 1| &= |3 - 2x| \Leftrightarrow x - 1 = 3 - 2x \text{ hoặc } x - 1 = -(3 - 2x) \\ &\Leftrightarrow 3x = 4 \text{ hoặc } -x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x = 2 \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{ \frac{4}{3}; 2 \right\}$.

$$\text{b) } |-4x| + 3x = 1 \Leftrightarrow |4x| = 1 - 3x \quad (*)$$

$$\text{Điều kiện : } 1 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq x \text{ hay } x \leq \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } (*) \quad &\Leftrightarrow 4x = 1 - 3x \text{ hoặc } 4x = -(1 - 3x) \\ &\Leftrightarrow 7x = 1 \text{ hoặc } x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \text{ hoặc } x = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \leq \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{ \frac{1}{7}; -1 \right\}$.

$$4. \text{ Ta có : } |2 - x| \geq 0, \text{ với mọi } x \Rightarrow |2 - x| + 3 \geq 3$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 3.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

ĐỀ SỐ 4

$$1. \text{ Chứng minh bất đẳng thức : } \frac{a^2}{a^4 + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ Giải bất phương trình : a) } \frac{15x - 2}{4} - \frac{x^2 - 1}{3} > \frac{x(1 - 2x)}{6} + \frac{x - 3}{2} \quad (1)$$

$$\text{b) } (x - 3)^2 + 2(x - 1) \leq x^2 + 3 \quad (2)$$

3. Giải phương trình :

$$\text{a) } |x - 2| = |3x| \quad \text{b) } |x - 2| = 3x.$$

$$4. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : } A = 3 - |1 - x|.$$

Giải

1. Ta có : $\frac{a^2}{a^4+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (a^4+1) \cdot \frac{a^2}{a^4+1} \leq \frac{1}{2}(a^4+1) \text{ (vì } a^4+1 > 0)$

$$\Leftrightarrow 2a^2 \leq a^4+1 \Leftrightarrow a^4-2a^2+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

2. a) (1) $\Leftrightarrow 45x-6-4x^2+4 \geq 2x-4x^2+6x-18$

$$\Leftrightarrow 37x \geq -16 \Leftrightarrow x \geq -\frac{16}{37}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{ x \mid x \geq -\frac{16}{37} \right\}$.

b) (2) $\Leftrightarrow x^2-6x+9+2x-2 \leq x^2+3 \Leftrightarrow -4x \leq -4$
 $\Leftrightarrow x \geq 1$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \geq 1\}$.

3. a) $|x-2| = |3x| \Leftrightarrow x-2 = 3x \text{ hoặc } x-2 = -3x$

$$\Leftrightarrow 2x = -2 \text{ hoặc } 4x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$

b) Điều kiện : $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Khi đó :

$$|x-2| = 3x \Leftrightarrow x-2 = 3x \text{ hoặc } x-2 = -3x$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2 \text{ hoặc } 4x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}$$

Vì $x \geq 0$, nên ta lấy $x = \frac{1}{2}$. Tập nghiệm : $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Cách khác :

• Nếu $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Khi đó : $|x-2| = 3x \Leftrightarrow x-2 = 3x \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại)}$

• Nếu $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Khi đó : $|x-2| = 3x \Leftrightarrow -(x-2) = 3x \Leftrightarrow -x+2 = 3x$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (nhận)}$$

Tập nghiệm : $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

4. Ta có : $|1-x| \geq 0$, với mọi $x \Rightarrow -|1-x| \leq 0$

$$\Rightarrow 3 - |1-x| \leq 3$$

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 3.

Dấu "=" xảy ra khi $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

ĐỀ SỐ 5

1. Chứng minh rằng nếu $x > 0$ và $y > 0$ thì $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

2. Giải bất phương trình :

a) $(x + 2)^2 + 3(x + 1) \geq x^2 - 4$ (1)

b) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \leq x - \frac{x-3}{4}$ (2)

3. Giải phương trình :

a) $|2 - x| = |x - 5|$

b) $|2 - x| = x$

c) $|x| + |2 - x| = 2$.

4. Tìm x sao cho $\frac{x-2}{x-1} < 0$.

Giải

1. Ta có : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$

$\Leftrightarrow xy \cdot \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2xy$ (vì $x > 0$ và $y > 0 \Rightarrow xy > 0$)

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

2. a) (1) $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 3x + 3 \geq x^2 - 4$

$\Leftrightarrow 7x + 7 \geq -4 \Leftrightarrow 7x \geq -11 \Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{7}$.

Tập nghiệm : $S = \left\{ x \mid x \geq -\frac{11}{7} \right\}$.

b) (2) $\Leftrightarrow 6(x - 1) - 4(x - 2) \leq 12x - 3(x - 3)$

$\Leftrightarrow 6x - 6 - 4x + 8 \leq 12x - 3x + 9$

$\Leftrightarrow 2x + 2 \leq 9x + 9 \Leftrightarrow -7x \leq 7 \Leftrightarrow x \geq -1$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \geq -1\}$.

3. a) $|2 - x| = |x - 5| \Leftrightarrow 2 - x = x - 5$ hoặc $2 - x = -(x - 5)$

$\Leftrightarrow 2x = 7$ hoặc $2 - x = -x + 5$ (vô nghiệm)

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

Tập nghiệm : $S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$.

b) Điều kiện : $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó : } |2 - x| = x &\Leftrightarrow 2 - x = x \text{ hoặc } 2 - x = -x \\ &\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{1\}$.

c) Ta có : $|x| + |2 - x| \geq |x + 2 - x| = 2$

Dấu "=" xảy ra khi x và $2 - x$ cùng dấu.

- Nếu $x \geq 0$ và $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.
- Nếu $x \leq 0$ và $2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ và $x \geq 2$ (vô nghiệm).

Vậy : $0 \leq x \leq 2$.

Tập nghiệm : $S = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$.

4. • Trường hợp 1 : $x - 2 > 0$ và $x - 1 < 0$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ và } x < 1 \text{ (vô nghiệm).}$$

- Trường hợp 2 : $x - 2 < 0$ và $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x > 1$
 $\Leftrightarrow 1 < x < 2$.

PHẦN HÌNH HỌC

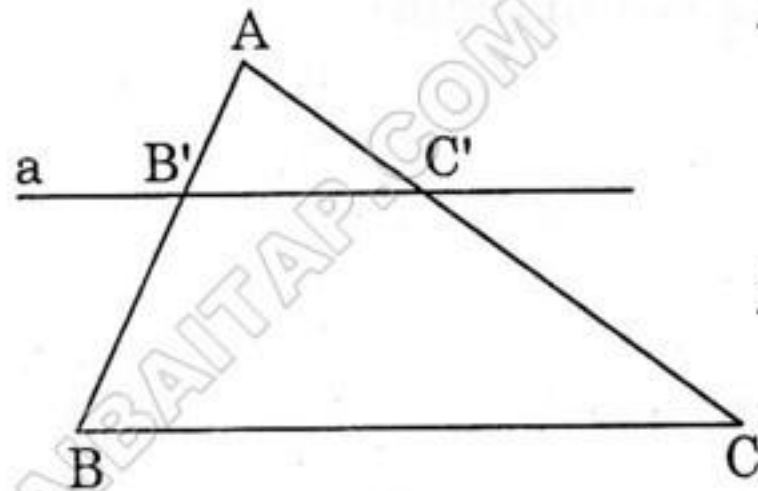
Chương III

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§1, 2. Định lý Talét.

Định lý đảo và hệ quả của định lý Talét

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ



1. Định lý thuận – đảo

$$B'C' \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}; \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$$

2. Hệ quả

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho tam giác ABC, một đường thẳng song song với cạnh BC cắt AB tại D và AC tại E. Trên tia đối của tia CA lấy F sao cho CF = BD. Gọi M là giao điểm của DF và BC.

a) Chứng minh $\frac{MD}{MF} = \frac{AC}{AB}$.

b) Cho BC = 8cm, BD = 5cm và DE = 3cm. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } DE \parallel BC \text{ (gt)} &\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC} \text{ (định lý Talét)} \\ &\Rightarrow \frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC}. \end{aligned}$$

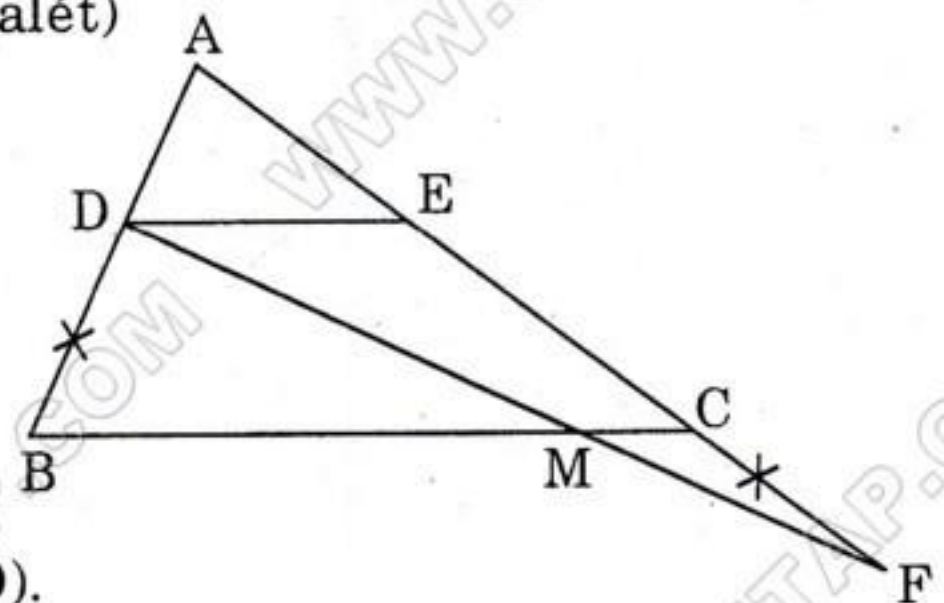
Xét $\triangle DEF$ có $MC \parallel DE$.

Theo định lý Talét :

$$\frac{MD}{MF} = \frac{EC}{CF} = \frac{EC}{BD} = \frac{AB}{AC} \text{ (vì } CF = BD).$$

b) Theo hệ quả của định lý Talét :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \text{ hay } \frac{3}{8} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{8} = \frac{AD}{3} = \frac{AB - AD}{8 - 3} = \frac{BD}{5} = 1$$



$$\Rightarrow AD = 3.1 = 3 \text{ (cm)}$$

Do đó $\triangle ADE$ cân tại D, lại có : $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{ACB} (= \widehat{AED})$. Vậy $\triangle ABC$ cân tại B.

ĐỀ SỐ 2

Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì trên BC. Vẽ đường thẳng MN song song với AC (N thuộc AB), đường thẳng MP song song với AB (P thuộc AC). Chứng minh : $\frac{AN}{AB} + \frac{AP}{AC} = 1$.

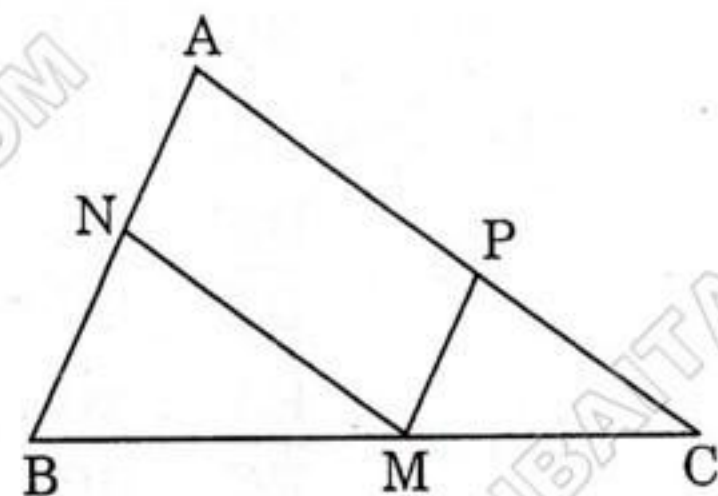
Giải

Ta có : $MN \parallel AC$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{CM}{CB} \quad (1) \quad (\text{định lí Talét})$$

$$\text{Tương tự } MP \parallel AB \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{MB}{CB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AN}{AB} + \frac{AP}{AC} = \frac{CM + MB}{CB} = \frac{CB}{CB} = 1.$$



ĐỀ SỐ 3

Cho tam giác ABC, vẽ tia Cx song song với cạnh AB. Từ trung điểm E của cạnh AB vẽ đường thẳng song song với cạnh BC cắt AC tại D và cắt tia Cx tại F. Đường thẳng BF cắt cạnh AC tại I.

a) Chứng minh $IC^2 = IA.ID$

b) Tính tỉ số $\frac{ID}{IC}$.

Giải

a) $Cx \parallel AB$ (gt) :

$$\frac{IC}{IA} = \frac{IF}{IB} \quad (1) \quad (\text{định lí Talét})$$

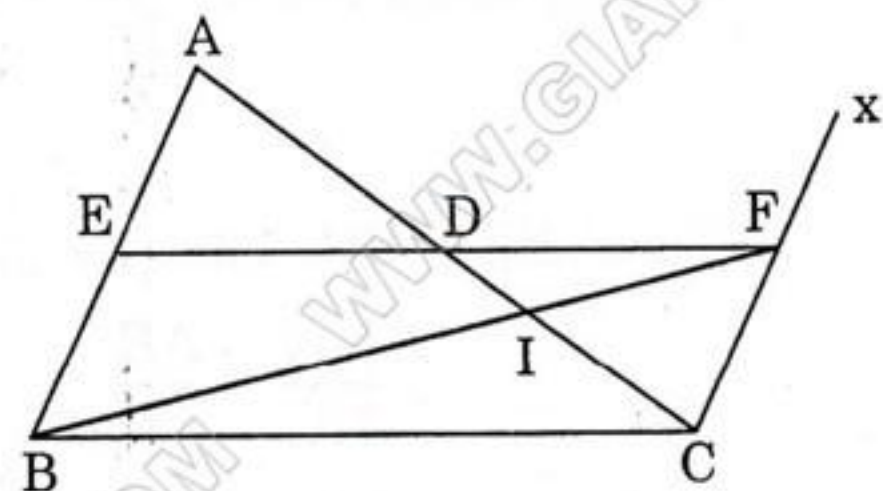
Mặt khác $EF \parallel BC$ theo định lí Talét :

$$\frac{IF}{IB} = \frac{ID}{IC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IC} \Rightarrow IC^2 = IA.ID.$$

b) Ta có $\frac{ID}{IC} = \frac{IF}{IB}$ (cmt) mà $Cx \parallel AB$ theo hệ quả của định lí Talét :

$$\frac{IF}{IB} = \frac{CF}{AB} = \frac{1}{2}. \quad \text{Vậy} \quad \frac{ID}{IC} = \frac{1}{2}.$$



ĐỀ SỐ 4

Cho tam giác ABC, đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Vẽ đường thẳng a qua A và song song với BC, đường thẳng a cắt các đường thẳng BE và CD lần lượt tại G và K. Chứng minh A là trung điểm của KG.

Giải

Ta có : $a \parallel BC$ (gt) theo hệ quả của định lí Talét :

$$\frac{KA}{BC} = \frac{DA}{DB} \quad (1)$$

Mặt khác $DE \parallel BC$ theo định lí Talét :

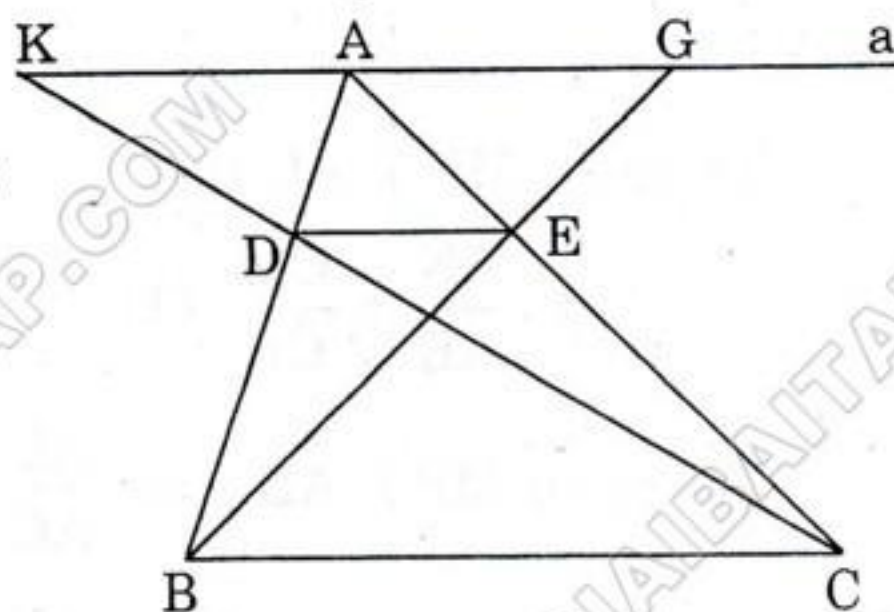
$$\frac{DA}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (2)$$

Lại có : $\frac{EA}{EC} = \frac{AG}{GC} \quad (3)$

(hệ quả của định lí Talét)

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{KA}{BC} = \frac{AG}{GC} \Rightarrow KA = AG$$

Chứng tỏ A là trung điểm của KG.



ĐỀ SỐ 5

Cho tam giác ABC, một điểm I nằm trong tam giác, IA, IB, IC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC đường thẳng này cắt BN tại E và CP tại F. Chứng minh rằng : $\frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$.

Chứng minh rằng : $\frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$.

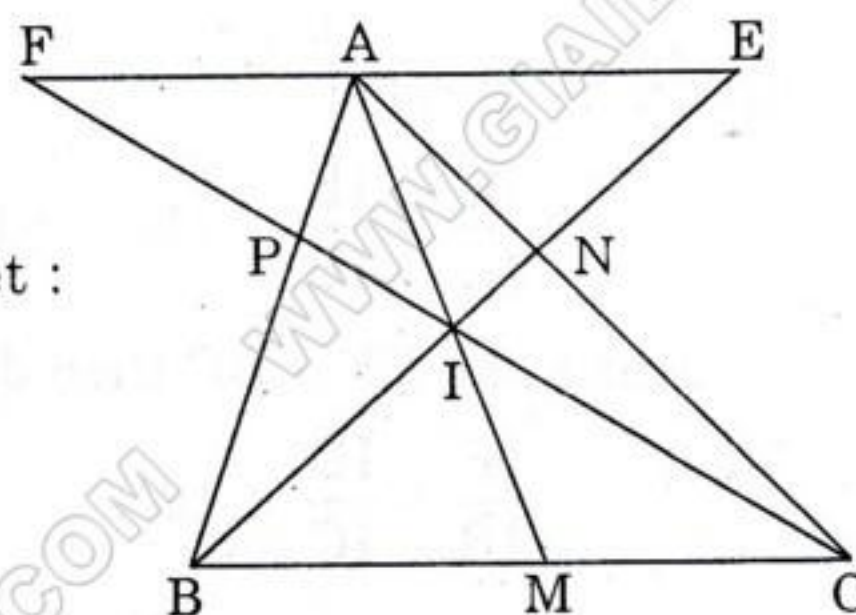
Giải

Ta có $EF \parallel BC$. Theo hệ quả định lí Talét :

$$\frac{NA}{NC} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

Tương tự : $\frac{PA}{PB} = \frac{AF}{FB} \quad (2)$

$$\Rightarrow \frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{AE + AF}{EC + FB} = \frac{EF}{BC} = \frac{IE}{IB} = \frac{IA}{IM}$$



ĐỀ SỐ 6

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của CD. I là giao điểm của AM với BD. K là giao điểm của BM với AC.

a) Chứng minh rằng : $IK \parallel AB$.

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của IK với AD và BC. Chứng minh rằng $EI = KF$.

Giải

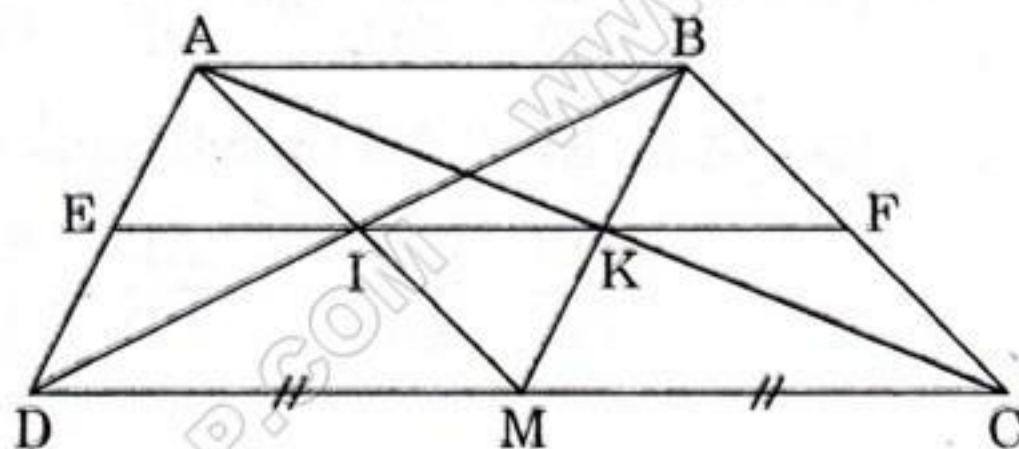
a) Theo giả thiết $AB \parallel CD$ nên theo hệ quả định lý Talét trong các tam giác IDM, KCM ta có :

$$\frac{IM}{IA} = \frac{DM}{AB}; \quad \frac{KM}{KB} = \frac{MC}{AB}$$

Mà $CM = DM$ nên

$$\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB} \Rightarrow IK \parallel AB$$

(Theo định lý Talét đảo).



b) $\triangle DAB$ có $EI \parallel AB$ nên : $\frac{EI}{AB} = \frac{DE}{DA}$ (1)

, $\triangle ABC$ có $KF \parallel AB$ nên : $\frac{KF}{AB} = \frac{CK}{CA}$ (2)

$\triangle ADC$ có $EK \parallel DC$ nên : $\frac{DE}{DA} = \frac{CK}{CA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) có $EI = KF$.

ĐỀ SỐ 7

Cho hình thang ABCD ($AB < CD$ và $AB \parallel CD$). Vẽ qua A đường thẳng AK song song với BC ($K \in DC$) và AK cắt BD tại E, vẽ qua B đường thẳng BI song song với AD ($I \in CD$) cắt AC tại F.

a) Chứng minh rằng : $EF \parallel AB$.

b) Chứng minh : $AB^2 = CD \cdot EF$.

Giải

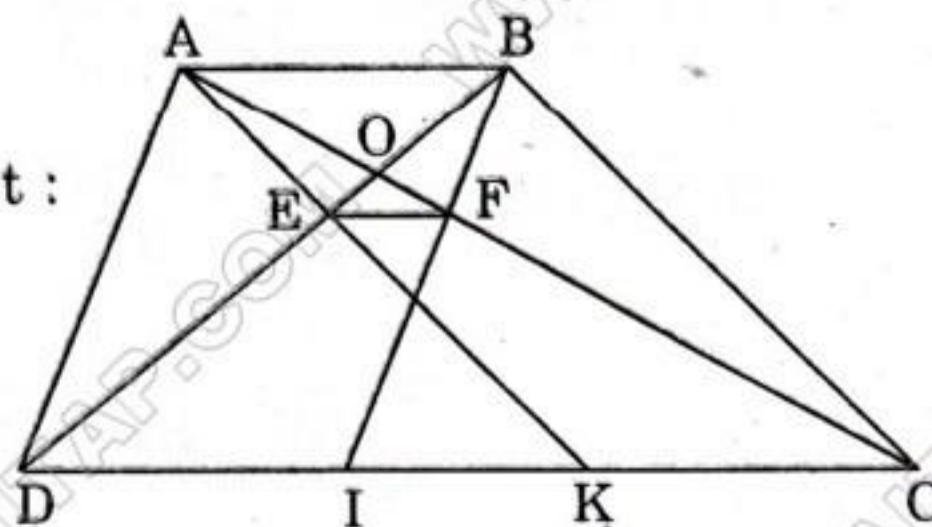
a) Ta có $AB \parallel CD$ (gt). Theo định lý Talét :

$$\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EK} \quad (\text{Hệ quả định lý Talét})$$

$$\frac{EA}{EK} = \frac{AB}{DK}$$

Chứng minh tương tự ta có : $\frac{FB}{FI} = \frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CI}$ mà $CI = DK$.

(Vì $CI = CK + KI$ và $DK = DI + KI$ mà $DI = CK (= AB)$)



$$\Rightarrow \frac{AB}{DK} = \frac{AB}{CI}. \quad \text{Do đó } \frac{EB}{ED} = \frac{FB}{FI}.$$

Theo định lí Talét đảo, ta có : $EF \parallel CD \parallel AB$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$$\text{Ta có : } \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} \text{ mà } \frac{OB}{OD} = \frac{OF}{OA} \text{ (do } BI \parallel AD).$$

Mặt khác $EF \parallel AB$ theo hệ quả định lí Talét :

$$\frac{OF}{OA} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EF.$$

ĐỀ SỐ 8

Cho hình bình hành ABCD, một điểm M trên đường chéo AC, đường thẳng BM cắt DC tại E và cắt đường thẳng AD tại F. Chứng minh rằng :

a) $MB^2 = ME \cdot MF$

b) $\frac{1}{BF} + \frac{1}{BE} = \frac{1}{BM}.$

Giải

a) Ta có : $BC \parallel AD$ (gt) $\Rightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{MC}{MA}$ (1) (định lí Talét)

Tương tự : $AB \parallel CD \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{ME}{MB}$ (2)

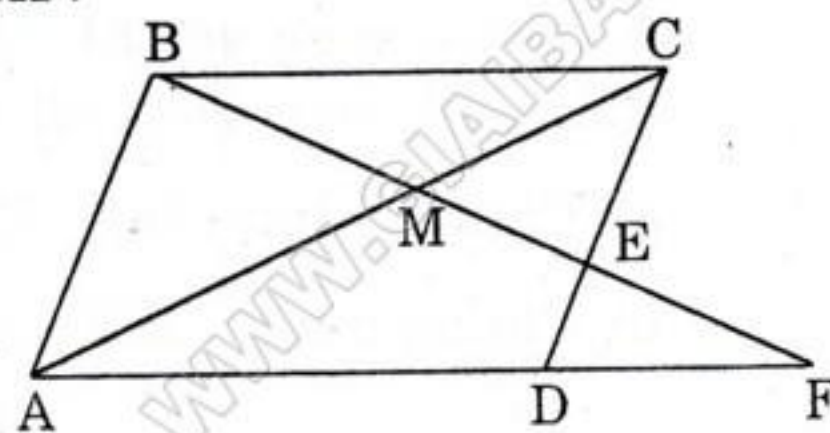
Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{ME}{MB} \Rightarrow MB^2 = ME \cdot MF.$

b) $BC \parallel AD$ ta có : $\frac{BM}{BF} = \frac{CM}{CA}$ (3)

$CD \parallel AB$ ta có : $\frac{BM}{BE} = \frac{AM}{CA}$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \frac{BM}{BF} + \frac{BM}{BE} = \frac{CM + AM}{CA} = 1$, chia cả 2 vế cho BM

$$\Rightarrow \frac{1}{BF} + \frac{1}{BE} = \frac{1}{BM} \text{ (đpcm).}$$



ĐỀ SỐ 9

Cho tam giác ABC, lấy D thuộc cạnh BC, kẻ tia BX song song với AD và Bx cắt đường thẳng CA tại E, kẻ tia Cy song song với AD và Cy cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh : $\frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{AD}.$

Giải

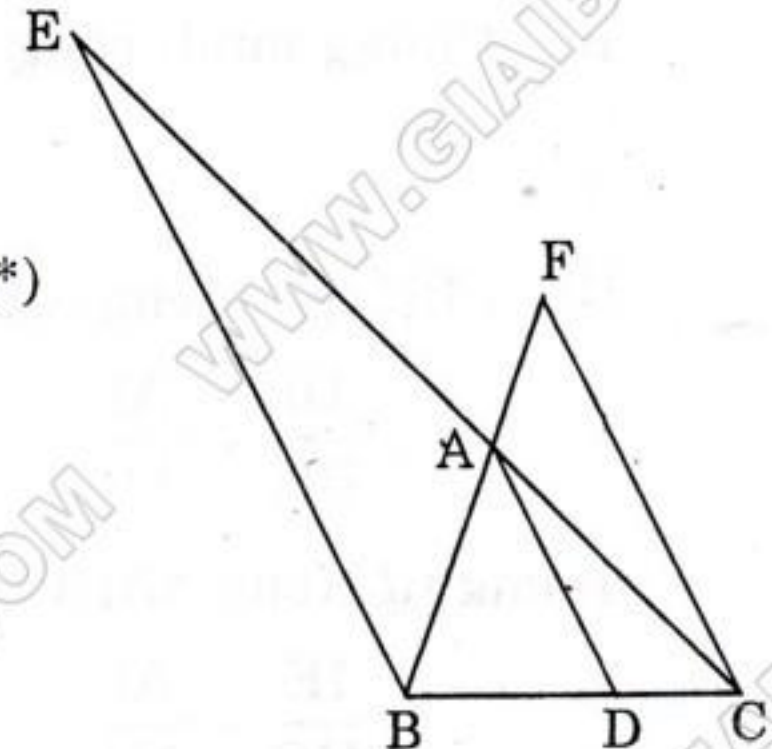
Ta có : $AD \parallel BE$ (gt) $\Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{CD}{CB}$ (1) (hệ quả định lí Talét)

Tương tự $AD \parallel CF \Rightarrow \frac{AD}{CF} = \frac{BD}{CB}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{AD}{BE} + \frac{AD}{CF} = \frac{CD + BD}{CB} = 1$ (*)

Chia cả 2 vế cho AD ta có :

(*) $\Leftrightarrow \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{AD}$ (đpcm).



ĐỀ SỐ 10

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ qua I đường thẳng song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại E và F. Chứng minh :

a) $IE = IF$.

b) $\frac{2}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$.

Giải

a) $IE \parallel AB$ (gt) $\Rightarrow \frac{IE}{AB} = \frac{DI}{DB}$ (1) (hệ quả định lí Talét)

Tương tự : $IF \parallel AB \Rightarrow \frac{IF}{AB} = \frac{CI}{CA}$ (2)

Lại có $AB \parallel CD$ nên : $\frac{DI}{DB} = \frac{CI}{CA}$ (3)

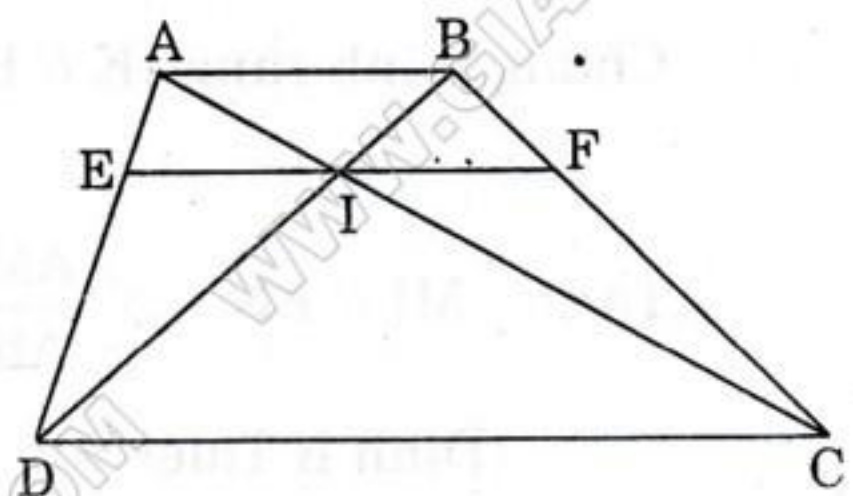
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{IE}{AB} = \frac{IF}{AB} \Rightarrow IE = IF$.

b) Ta có : $\frac{IE}{AB} = \frac{DE}{DA}$; $\frac{IE}{CD} = \frac{AE}{DA}$

$\Rightarrow \frac{IE}{AB} + \frac{IE}{CD} = \frac{DE + AE}{DA} = 1$ (*)

Chia cả 2 vế cho IE : (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{IE}$ mà $IE = \frac{1}{2} EF$

$\Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$ (đpcm).



ĐỀ SỐ 11

Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Lấy I, K thuộc đường cao AH sao cho $AI = IK = KH$. Qua I và K vẽ các đường thẳng DE, MN song song với BC . Chứng minh rằng : $\frac{DE}{BC} = \frac{AI}{AH}$; $\frac{MN}{BC} = \frac{AK}{AH}$.

Giải

$DE \parallel BC$ (gt) trong $\triangle AHB$ theo hệ quả của định lí Talét ta có :

$$\frac{DI}{BH} = \frac{AI}{AH} \quad (1)$$

Tương tự trong $\triangle AHC$ ta có :

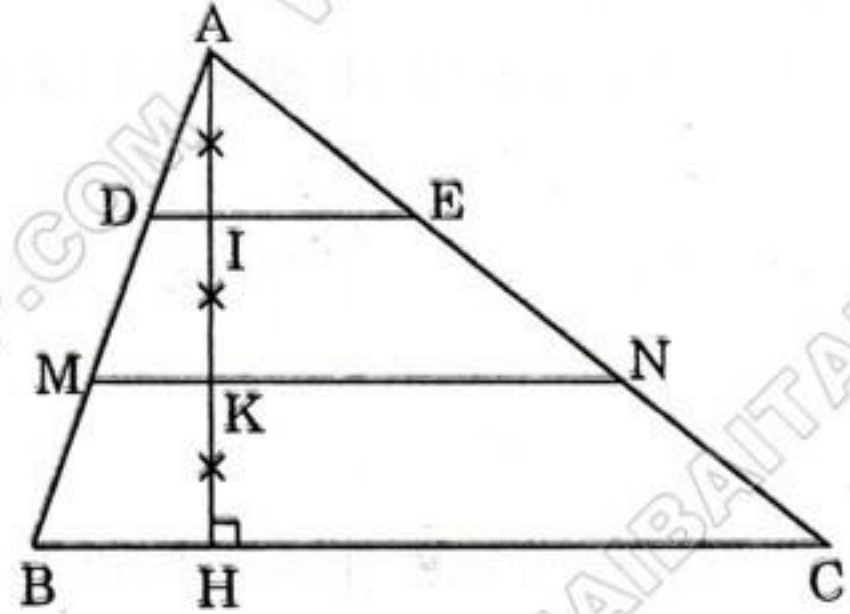
$$\frac{IE}{HC} = \frac{AI}{AH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{DI}{BH} = \frac{IE}{HC} = \frac{AI}{AH}$

$$\Rightarrow \frac{DI + IE}{BH + HC} = \frac{AI}{AH} \text{ hay } \frac{DE}{BC} = \frac{AI}{AH} = \frac{1}{3} \quad (\text{đpcm})$$

Tương tự $MN \parallel BC$, ta có :

$$\frac{MK}{BH} = \frac{KN}{HC} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AK}{AH} = \frac{2}{3} \quad (\text{đpcm})$$



ĐỀ SỐ 12

Cho tam giác ABC . Lấy M, N bất kì lần lượt thuộc hai cạnh AB và AC . Nối B với N và C với M . Qua M kẻ đường thẳng song song với BN cắt AC tại I , qua N kẻ đường thẳng song song với CM cắt AB tại K . Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.

Giải

Ta có : $MI \parallel BN \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AN} \quad (1)$

(Định lí Talét với $\triangle ABN$)

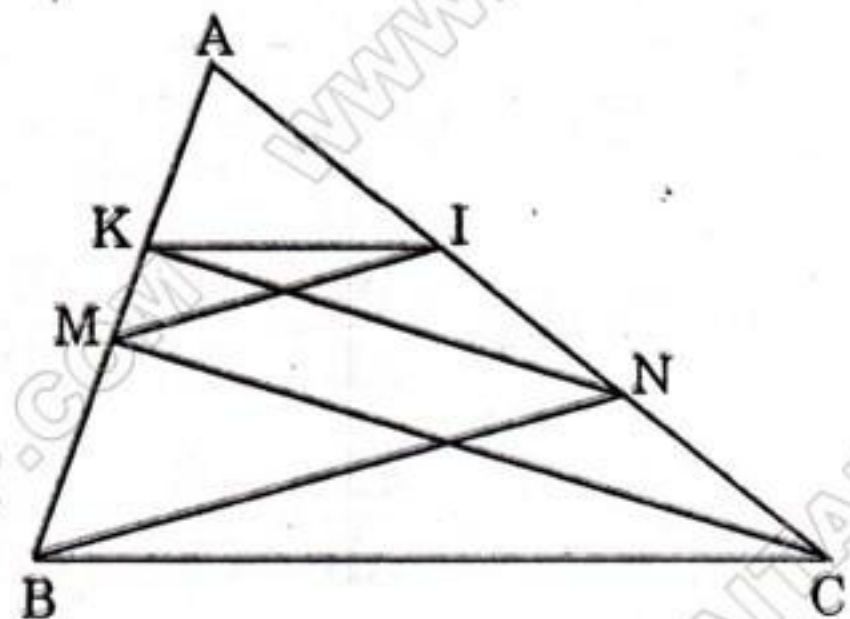
$NK \parallel CM \Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{AN}{AC} \quad (2)$

(Định lí Talét với $\triangle ACM$)

Nhân (1) và (2) vế với vế ta có :

$$\frac{AM}{AB} \cdot \frac{AK}{AM} = \frac{AI}{AN} \cdot \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AI}{AC}$$

$$\Rightarrow KI \parallel BC \text{ (định lí Talét đảo).}$$



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Bổ đề về diện tích

Cho góc nhọn xOy . Trên cạnh Ox lấy hai điểm bất kì A, A' , trên cạnh Oy lấy hai điểm B và B' . Chứng minh rằng : $\frac{S_{OA'B'}}{S_{OAB}} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB}$.

Áp dụng :

- *Bài toán 1 :* Cho tam giác ABC . Lấy điểm M thuộc cạnh AB sao cho $BM = \frac{1}{3}BA$. Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tính tỉ số $\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}}$.

- *Bài toán 2 :* Cho tam giác ABC lấy điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Gọi N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$. Tính tỉ số $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}$.

- *Bài toán 3 :* Cho tam giác ABC , M là trung điểm của AB , N thuộc cạnh AC sao cho : $S_{AMN} = \frac{1}{8}S_{ABC}$. Tính tỉ số $\frac{AN}{AC}$.

2. Cho tam giác ABC , I là một điểm nằm trong tam giác IA, IB, IC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P .

Chứng minh rằng : $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$ (*Định lí Xêva*).

3. Cho tam giác ABC , một đường thẳng bất kì qua A cắt BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P .

Chứng minh rằng : $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$ (*Định lí Mê-nê-la-uyt*).

4. Cho hình bình hành $ABCD$, một đường thẳng d đi qua A cắt DB, CB và DC lần lượt tại E, F và G . Chứng minh rằng : $BF \cdot DG$ không đổi.

5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) đường thẳng song song với đáy cắt cạnh bên AD ở I , cắt đường chéo BD ở K và đường chéo AC ở L cắt cạnh bên BC ở M .

a) Chứng minh $IK = LM$.

b) Đường thẳng đi qua giao điểm O của hai đường chéo và song song với hai đáy cắt hai cạnh bên ở E và F . Chứng minh $OE = OF$.

6. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Trên AH lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EH$. Qua D và E vẽ các đường thẳng MN, RS song song với BC ($M, R \in AB; N, S \in AC$). Chứng minh rằng :

a) $MN = \frac{1}{3}BC, RS = \frac{2}{3}BC$

b) $S_{MNSR} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Hướng dẫn

1. Chứng minh : Kẻ AH, A'H' vuông góc với Oy.

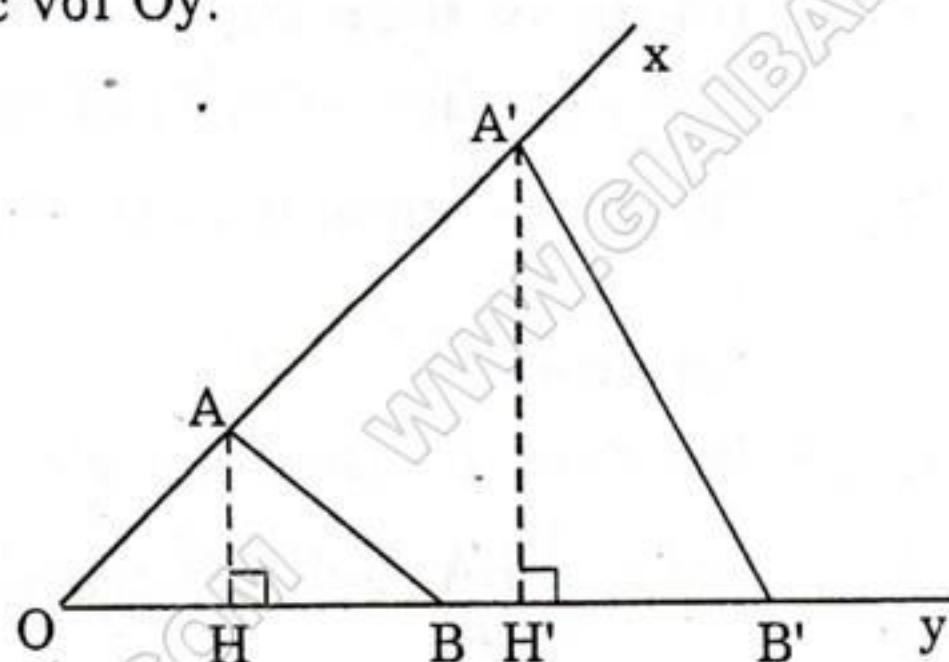
Ta có : A'H' // AH.

Theo định lí Talét : $\frac{A'H'}{AH} = \frac{OA'}{OA}$.

Mặt khác : $S_{OA'B'} = \frac{1}{2} A'H' \cdot OB'$

và $S_{OAB} = \frac{1}{2} AH \cdot OB$

Vậy $\frac{S_{OA'B'}}{S_{OAB}} = \frac{\frac{1}{2} A'H' \cdot OB'}{\frac{1}{2} AH \cdot OB} = \frac{A'H'}{AH} \cdot \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB}$.

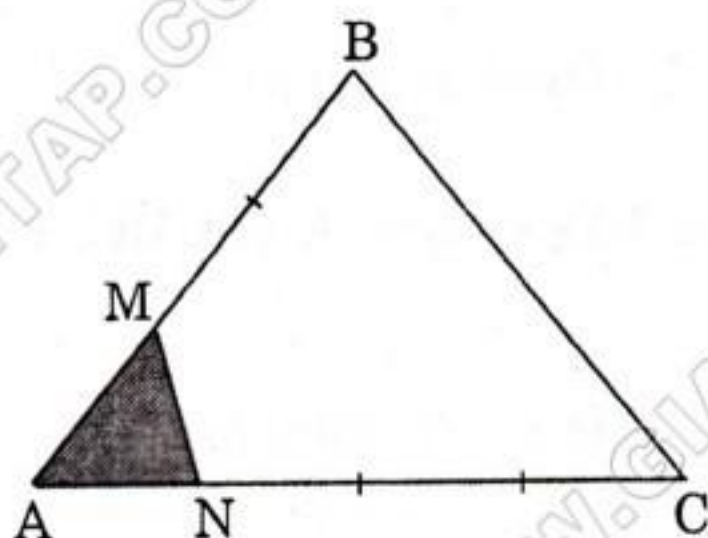
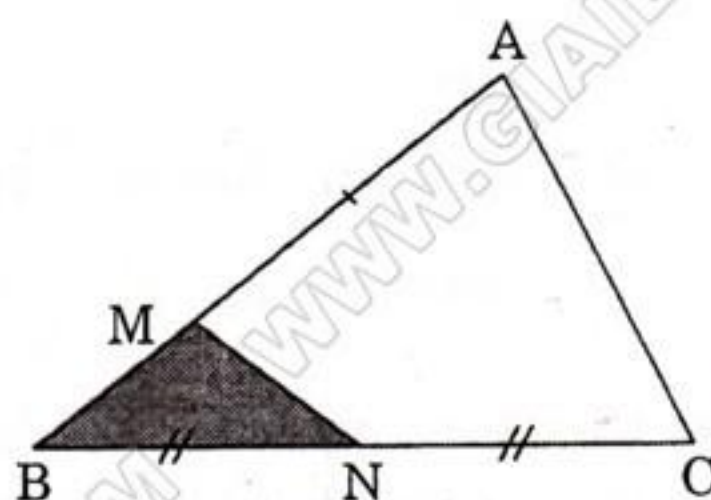


Áp dụng :

• Bài toán 1.

Theo bổ đề trên, ta có :

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$



• Bài toán 2 :

Theo bổ đề trên, ta có :

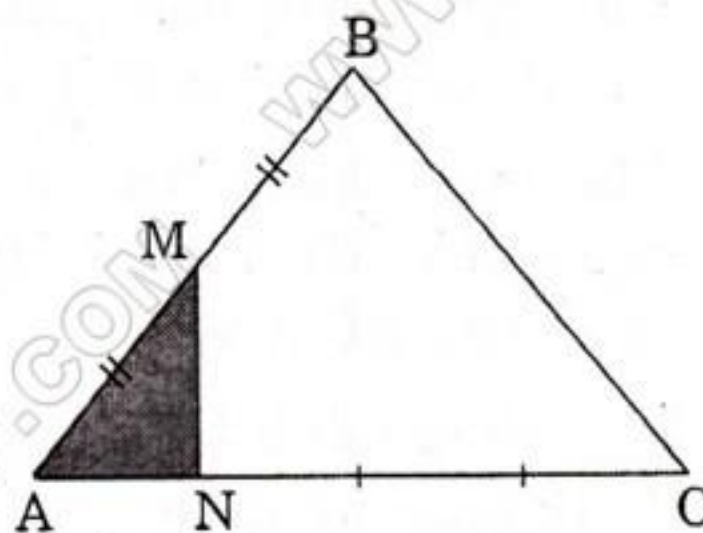
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

• Bài toán 3 :

Theo bổ đề trên, ta có :

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$



2. Kẻ qua A đường thẳng d // BC và d cắt BN, CP lần lượt tại E và F.

Áp dụng định lí Talét : $\frac{MB}{MC} = \frac{AE}{AF}$, $\frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AE}$, $\frac{PA}{PB} = \frac{AF}{BC}$.

Nhân vế với vế 3 đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

3. Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt MN tại Q.

Áp dụng định lí Talét : $\frac{MB}{MC} = \frac{PB}{QC}, \frac{NC}{NA} = \frac{QC}{PA}$.

Nhân vế với vế 2 đẳng thức trên với $\frac{PA}{PB}$ ta có điều phải chứng minh.

4. Theo hệ quả định lí Talét $\frac{CG}{AB} = \frac{CF}{BF}, \frac{DG}{CG} = \frac{AD}{CF}$.

Nhân vế với vế ta suy ra : $BF \cdot DG = AB \cdot AD$ (không đổi).

5. a) Theo hệ quả định lí Talét :

$$\frac{IK}{AB} = \frac{DK}{DB} = \frac{CM}{CB} = \frac{LM}{AB} \Rightarrow IK = LM.$$

b) Chứng minh tương tự câu a) :

$$\frac{OE}{AB} = \frac{OD}{DB} = \frac{OC}{CA} = \frac{OF}{AB} \Rightarrow OE = OF.$$

6. a) Theo hệ quả định lí Talét : $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AH}$

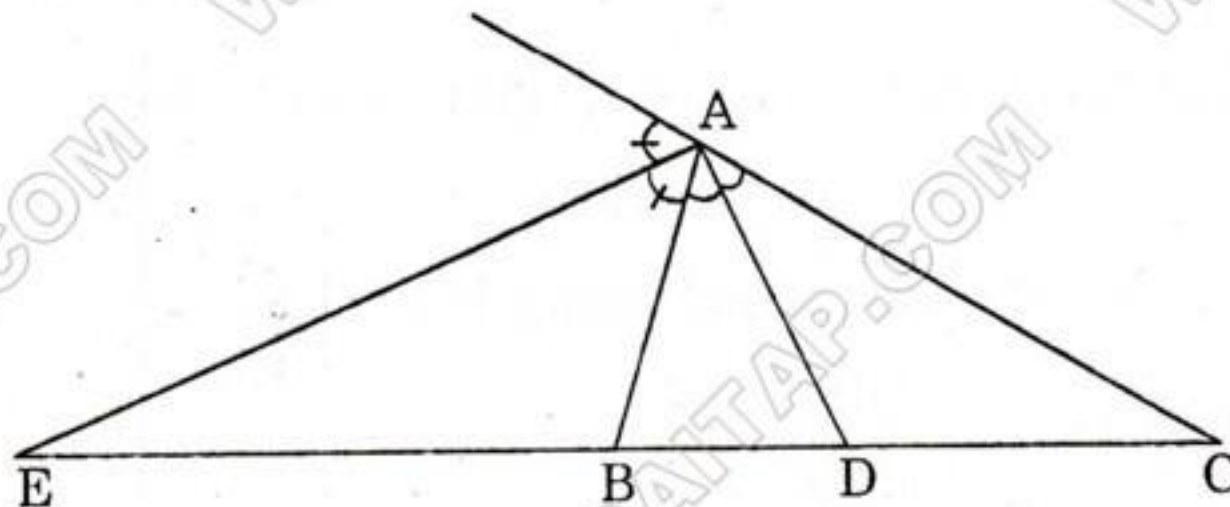
$$\text{mà } AD = DE = EH \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{AD}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3} BC.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \frac{RS}{BC} = \frac{AR}{AB} = \frac{AE}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow RS = \frac{2}{3} BC.$$

$$\text{b) } S_{MNSR} = \frac{1}{2} (MN + RS) \cdot DE = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

§3. Tính chất đường phân giác của tam giác

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ



$\triangle ABC$ có AD, AE lần lượt là các phân giác trong và ngoài của góc A

$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, các đường phân giác của góc BMA và góc CMA cắt AB, AC tương ứng tại D và E.

a) Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

b) Gọi O là giao điểm của AM và DE. Chứng minh : $OD = OE$.

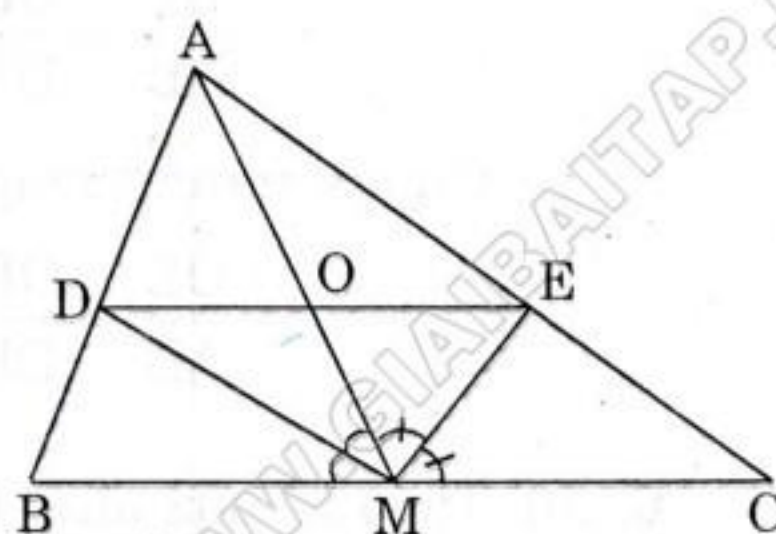
Giải

a) DM là đường phân giác của $\triangle ABM$ nên theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} \quad (1)$$

Tương tự EM là đường phân giác $\triangle ACM$ nên :

$$\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC} \quad (2)$$



Mà $MB = MC$ nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$

$\Rightarrow DE \parallel BC$ (định lý Talét đảo).

b) $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ mà $\frac{AD}{AB} = \frac{OD}{BM}$ và $\frac{AE}{AC} = \frac{OE}{CM}$.

Do đó : $\frac{OD}{BM} = \frac{OE}{CM}$ mà $BM = CM$ (gt) $\Rightarrow OD = OE$.

ĐỀ SỐ 2

Cho tam giác ABC. Điểm D nằm trên cạnh BC thỏa mãn $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \neq 1$.

Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc BAC.

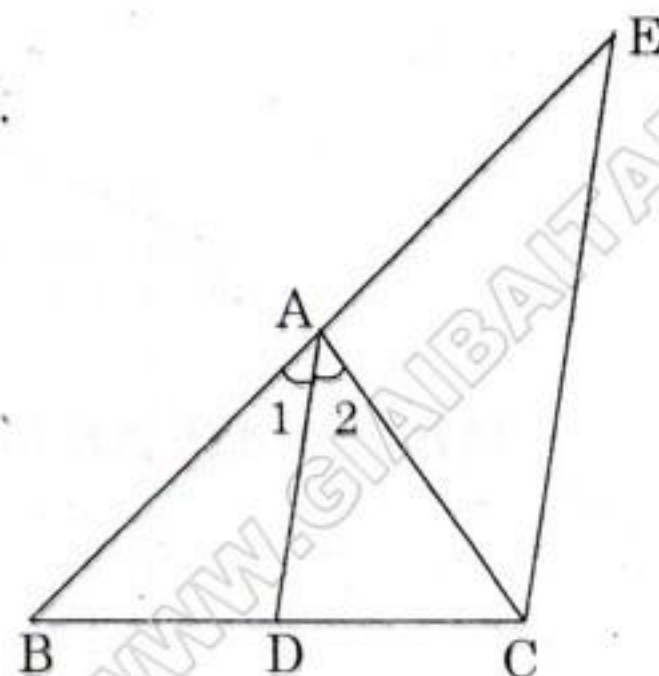
Giải

Kẻ $Cx \parallel AD$ và Cx cắt đường thẳng BA tại E.

Theo định lý Talét : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$

Lại có : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (gt) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$
 $\Rightarrow AE = AC$.

Do đó : $\widehat{ACE} = \widehat{AEC}$ (1)



Mặt khác $AD \parallel CE \Rightarrow \widehat{ACE} = \hat{A}_2$ (SLT) (2)

$$\widehat{AEC} = \hat{A}_1 \text{ (đvị)} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ hay AD là phân giác của góc BAC.

ĐỀ SỐ 3

Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 21\text{cm}$, $AC = 28\text{cm}$, phân giác AD ($D \in BC$). Đường thẳng qua D song song với BA cắt CA tại E. Tính độ dài DB, DC, ED.

Giải

$\triangle ABC$ vuông tại A theo định lý Pitago ta có :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35 \text{ (cm)}$$

AD là phân giác của \hat{A} :

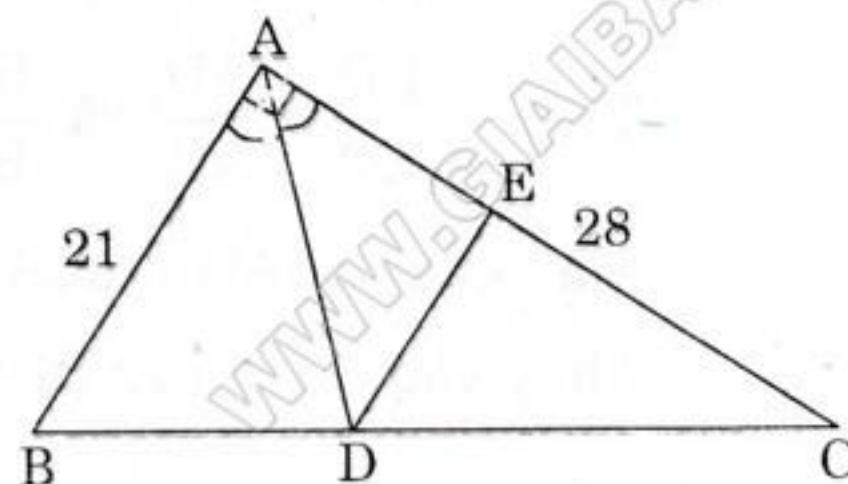
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\Rightarrow DB = 15; \quad DC = 20.$$

$$DE \parallel AB \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \text{ (hệ quả định lý Talét)}$$

$$\Rightarrow DE = \frac{DC \cdot AB}{BC} = \frac{20 \cdot 21}{35} = 12 \text{ (cm)}.$$



ĐỀ SỐ 4

Cho hình bình hành ABCD, kẻ các tia phân giác của các góc A và D. Các tia phân giác này cắt đường chéo BD và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.

Giải

Ta có AM là phân giác của $\triangle ABD$:

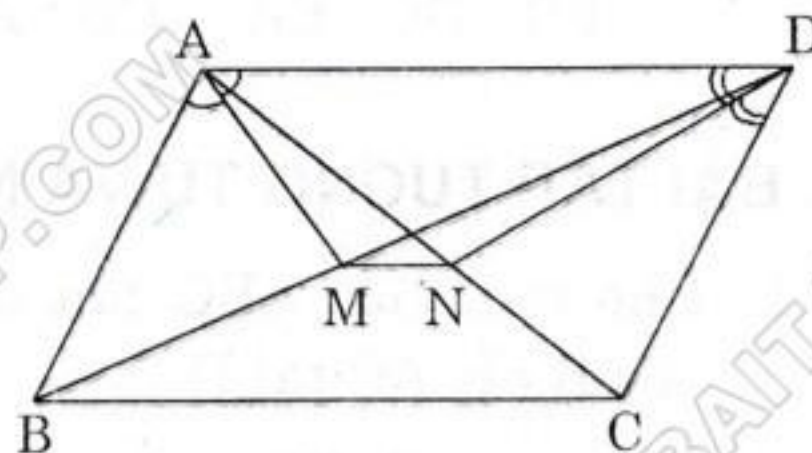
$$\frac{MD}{MB} = \frac{AD}{AB}$$

Tương tự DN là phân giác :

$$\frac{NA}{NC} = \frac{AD}{DC} \text{ (mà } AB = CD)$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{NA}{NC} \Rightarrow \frac{MD+MB}{MB} = \frac{NA+NC}{NC} \text{ hay } \frac{BD}{MB} = \frac{CA}{NC}$$

Do đó theo định lý Talét đảo : $MN \parallel AD \parallel BC$.



ĐỀ SỐ 5

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 135^\circ$. Dựng qua A tia Ax vuông góc với AC và tia Ay vuông góc với AB, các tia Ax, Ay lần lượt cắt cạnh BC tại D và E ($D, E \in BC$). Chứng minh $BD^2 = BC \cdot DE$.

Giải

Ta có : $Ax \perp AC$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

Tương tự ta có :

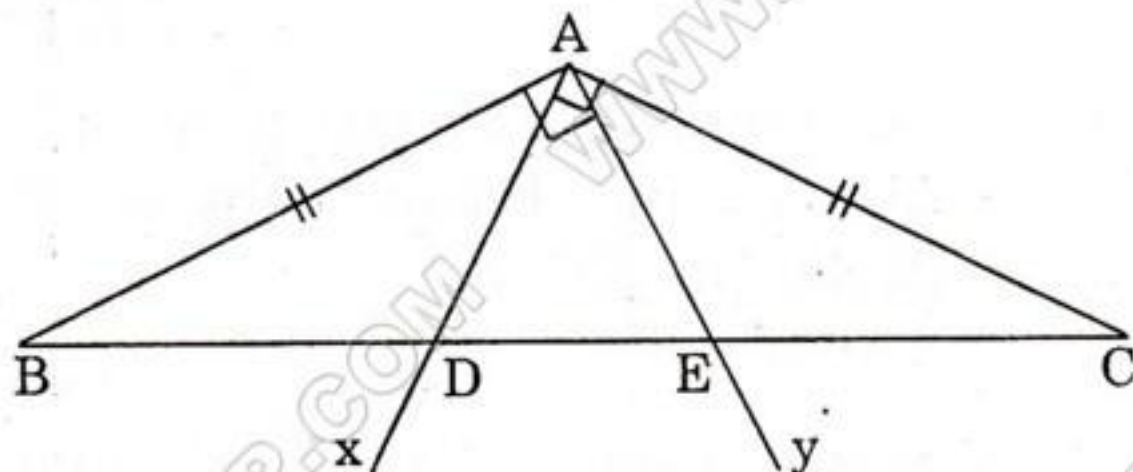
$$\widehat{CAE} = \widehat{BAD} = 45^\circ$$

Do đó AE và AB là phân giác trong và ngoài của góc \widehat{BAC}

$$\text{Ta có : } \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} \text{ và } \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow EC \cdot BD = BC \cdot DE \quad (1)$$

Mặt khác $\triangle BAD = \triangle CAE$ (g.c.g) $\Rightarrow BD = EC$

Thay vào (1) ta có : $BD^2 = BC \cdot DE$ (đpcm).



ĐỀ SỐ 6

Cho tam giác ABC, có ba đường phân giác AD, BE và CF.

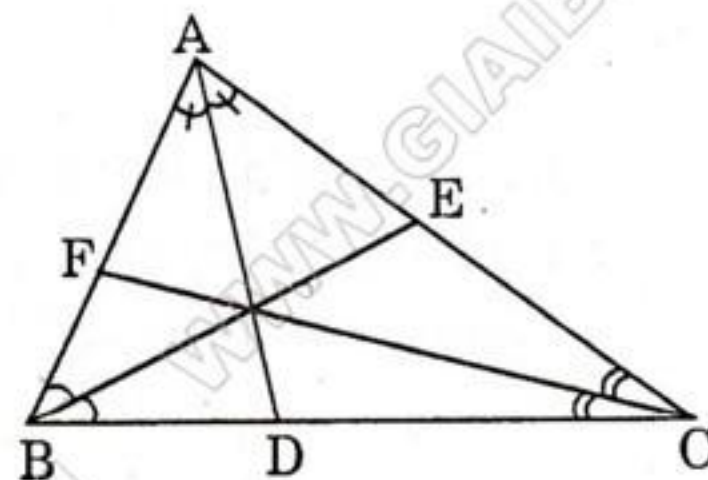
Chứng minh rằng : $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$.

Giải

Theo tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}; \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}; \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$$

$$\Rightarrow \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1.$$



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho tam giác ABC cân tại A biết $AB = 15\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, phân giác góc B cắt AC tại D.

a) Tính AD, CD.

b) Đường vuông góc với BD tại B cắt đường thẳng AC tại E. Tính EC.

2. Cho tam giác ABC có phân giác AD. Chứng minh rằng : $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$.

3. Cho tam giác ABC, giao điểm O của ba đường phân giác của tam giác chia đường phân giác AA₁ theo tỉ số nào?
4. Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến, các phân giác của \widehat{BMA} và \widehat{CMA} cắt AB và AC tương ứng tại D và E. Chứng minh rằng DE // BC.

Hướng dẫn

1. a) Đáp số : AD = 9; CD = 6.

b) BE là phân giác góc ngoài của \widehat{B} ta có : $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$.

Đáp số : 30.

2. Kẻ đường cao AH ta có : $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$

Lại có AD là phân giác : $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

3. Ta có : $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{A_1B}{A_1B + A_1C} = \frac{b}{b + c}$.

$$\frac{A_1B}{BC} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow A_1B = \frac{ac}{b + c}.$$

Vì OB là phân giác ta có : $\frac{AO}{A_1O} = \frac{AB}{A_1B} \Rightarrow \frac{AO}{A_1O} = \frac{b + c}{a}$.

4. Theo tính chất đường phân giác :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow DE // BC.$$

§4, 5, 6, 7. Khái niệm tam giác đồng dạng

Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} (=k) \end{cases}$$

2. Tính chất

* Tỉ số chu vi : $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$

* Tỷ số diện tích : $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$

* Hai tam giác đồng dạng thì tỷ số các đường cao, trung tuyến, phân giác tương ứng bằng tỷ số đồng dạng.

3. Các trường hợp đồng dạng

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

- a) Chứng tỏ rằng tỷ số các chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỷ số đồng dạng.
- b) Cho tam giác ABC và tam giác A'B'C' đồng dạng theo tỷ số $k = \frac{2}{7}$. Biết rằng tổng chu vi của hai tam giác bằng 180m. Tính chu vi của mỗi tam giác.

Giải

a) Ta có :

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}.$$

$$b) \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ABC}}{2} = \frac{P_{A'B'C'}}{7} = \frac{P_{ABC} + P_{A'B'C'}}{2 + 7} = \frac{180}{9} = 20$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = 40 \text{ (m)}; \quad P_{A'B'C'} = 140 \text{ (m)}.$$

ĐỀ SỐ 2

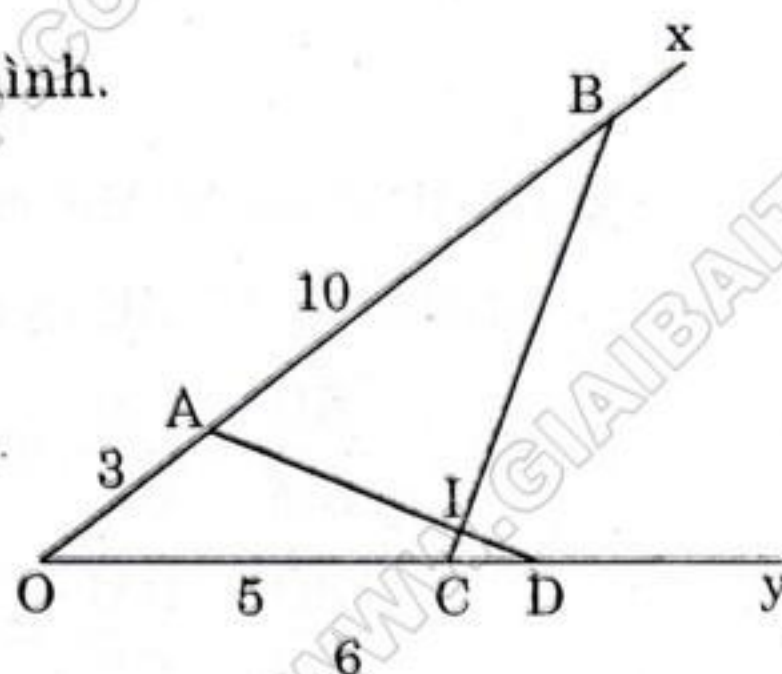
Cho góc nhọn \widehat{xOy} . Trên tia Ox lấy 2 điểm A và B sao cho OA = 3cm, OB = 10cm. Trên tia Oy lấy 2 điểm C và D sao cho OC = 5cm, OD = 6cm. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Nêu các cặp tam giác đồng dạng trong hình.

b) Chứng minh $IA.ID = IB.IC$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \frac{OA}{OD} &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \frac{OC}{OB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{OA}{OD} &= \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2} \quad (1) \end{aligned}$$



Xét $\triangle AOD$ và $\triangle COB$ có \widehat{O} chung và (1) $\Rightarrow \triangle AOD \sim \triangle COB$ (c.g.c)

Do đó $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$ (góc tương ứng) lại có $\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle AIB \sim \triangle CID$ (g.g).

$$\text{b) } \triangle AIB \sim \triangle CID \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IB}{ID} \Rightarrow IA.ID = IB.IC.$$

ĐỀ SỐ 3

Cho hình bình hành ABCD. Từ A vẽ AH, AK lần lượt vuông góc với CD và BC. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ và $\triangle KAH$ đồng dạng.

Giải

Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết góc A tù.

Ta có: $S_{ABCD} = DC.AH = BC.AK$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AK}{DC}$$

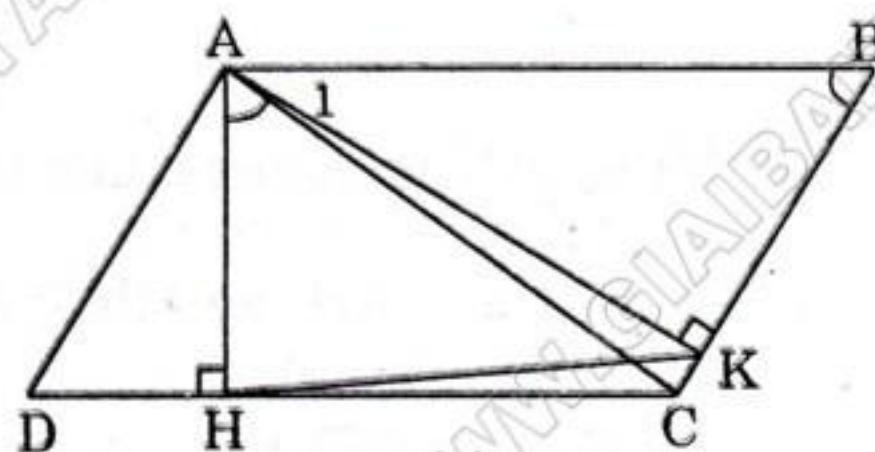
$$\text{mà } DC = AB \text{ nên } \frac{AH}{BC} = \frac{AK}{AB} \quad (1)$$

$AH \perp DC$ mà $DC \parallel AB$ (gt)

$\Rightarrow AH \perp AB$ hay $\widehat{HAB} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{B} = \widehat{HAK}$ (2) (cùng phụ với góc $\widehat{A_1}$)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KAH$ (c.g.c).



ĐỀ SỐ 4

Cho tam giác ABC cân tại A. M là trung điểm của cạnh BC, lấy D và E lần lượt thuộc cạnh AB và AC sao cho $\widehat{MDB} = \widehat{CME}$.

a) Chứng minh: $BM^2 = BD.CE$.

b) Chứng minh tam giác MDE và tam giác BDM đồng dạng.

Giải

a) Xét $\triangle BDM$ và $\triangle CME$ có $\widehat{B} = \widehat{C}$ (gt); $\widehat{BDM} = \widehat{CME}$ (gt)

$\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle CME$ (g.g)

Do đó: $\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$ mà $CM = BM$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM^2.$$

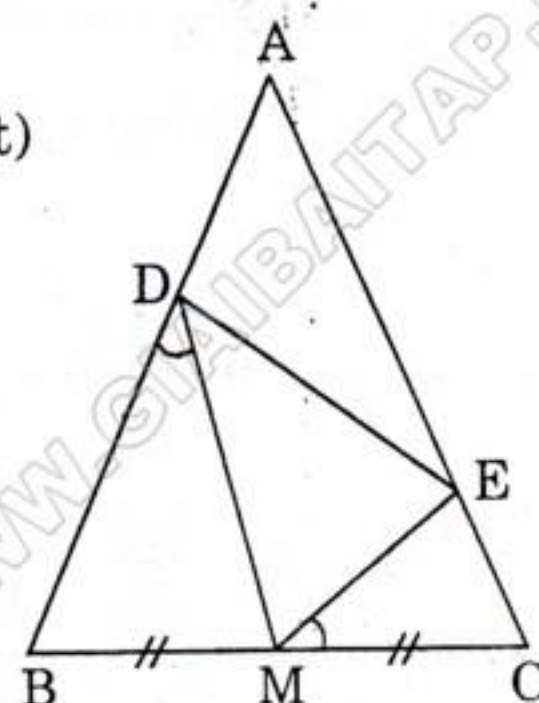
b) Ta có: $\widehat{CME} + \widehat{EMD} + \widehat{DMB} = 180^\circ$ (kề bù)

mà $\widehat{BDM} + \widehat{B} + \widehat{DMB} = 180^\circ$ (tổng các góc trong một tam giác)

mà $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{B}$ (1)

$$\text{Lại có: } \frac{BD}{BM} = \frac{CM}{ME} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MDE \sim \triangle BDM$ (c.g.c).



ĐỀ SỐ 5

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của HC và AC, nối AM và MN. Lấy điểm G trên AM sao cho $GM = \frac{1}{2}GA$. Chứng minh:

a) $\triangle GAH$ và $\triangle GMN$ đồng dạng.

b) Ba điểm H, G, N thẳng hàng.

Giải

a) Ta có MN là đường trung bình của $\triangle AHC$ nên

$$MN = \frac{1}{2}AH \text{ và } MN \parallel AH$$

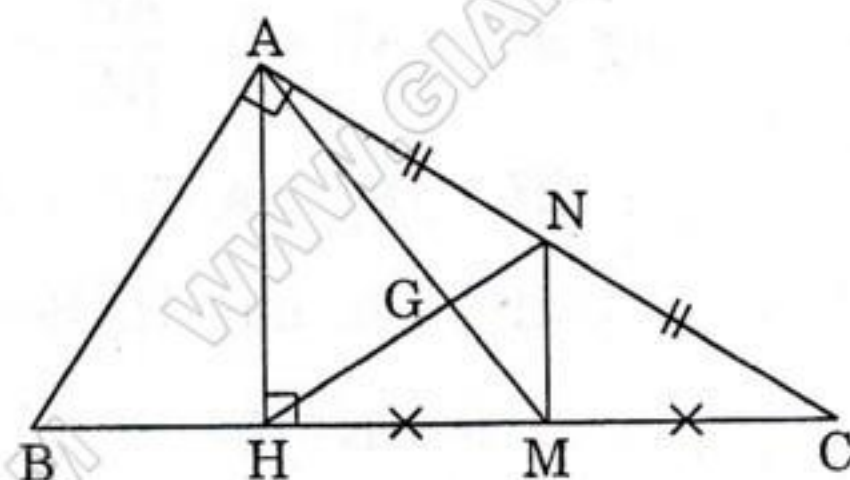
$\Rightarrow \widehat{HAG} = \widehat{NMG}$ (so le trong), lại có

$$\frac{MN}{AH} = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{2}$$

Do đó $\triangle GAH \sim \triangle GMN$ (c.g.c).

b) $\triangle GAH \sim \triangle GMN$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AGH} = \widehat{NGM}$

Do đó ba điểm H, G, N thẳng hàng.



ĐỀ SỐ 6

Cho tam giác ABC, trên cạnh AB và AC lấy các điểm tương ứng D và E. Đường thẳng song song với AC qua D cắt BE tại I, đường thẳng song song với AB qua E cắt CD tại K. Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.

Giải

Gọi F là giao điểm của BE và CD.

Ta có $DI \parallel AC$ (gt) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$ (so le trong)
và $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ (đối đỉnh)

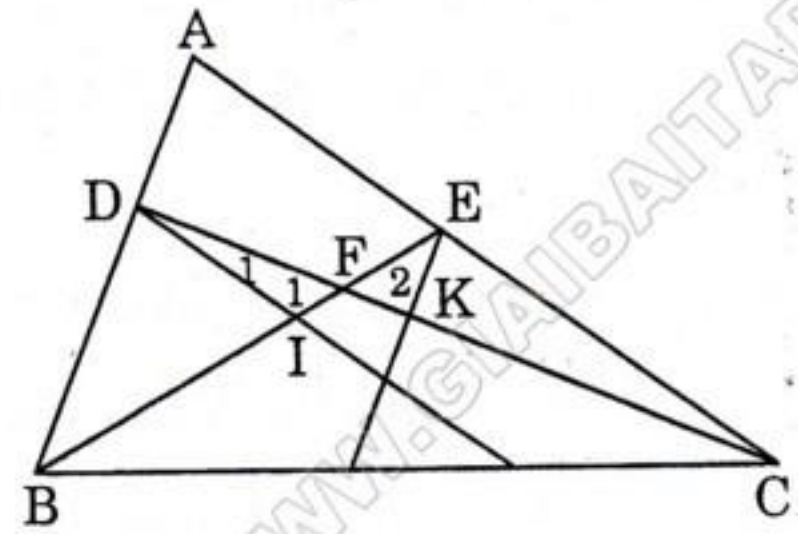
Do đó $\triangle DFI \sim \triangle CFE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{FI}{FD} = \frac{FE}{FC} \Rightarrow FC \cdot FI = FD \cdot FE \quad (1)$$

Tương tự ta có $\triangle DFB \sim \triangle KFE \Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{FE}{FK} \Rightarrow FB \cdot FK = FD \cdot FE \quad (2)$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow FC \cdot FI = FB \cdot FK \Rightarrow \frac{FI}{FB} = \frac{FK}{FC}$$

Do đó theo định lý Talét đảo ta có $KI \parallel BC$.



ĐỀ SỐ 7

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 2,5\text{cm}$; $AD = 3,5\text{cm}$; $BD = 5\text{cm}$ và $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$.

a) Chứng minh $\triangle ADB$ và $\triangle BCD$ đồng dạng.

b) Tính BC, CD.

Giải

a) Ta có $AB \parallel CD$ (gt) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (so le trong)

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle BCD$ có :

$$\hat{B}_1 = \hat{D}_1 \text{ (cmt)}$$

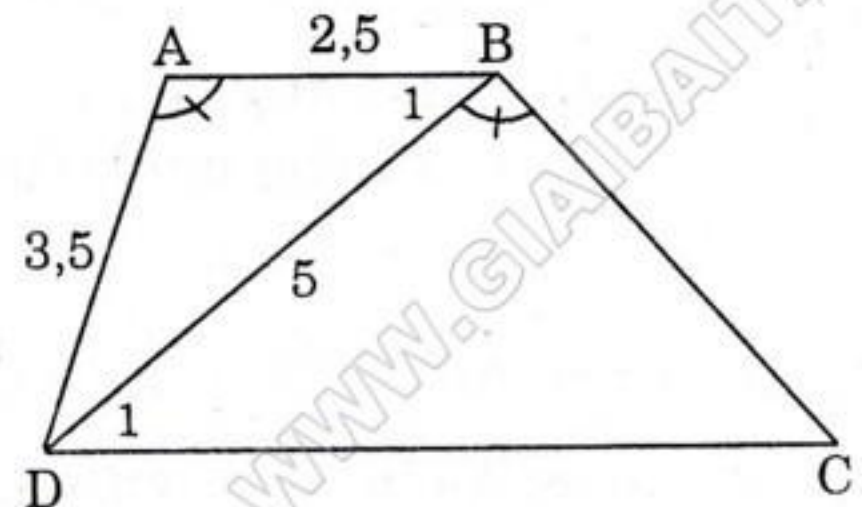
$$\widehat{DAB} = \widehat{DBC} \text{ (gt)}$$

Do đó $\triangle ADB \sim \triangle BCD$ (gg).

$$\text{b) } \triangle ADB \sim \triangle BCD \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{AD \cdot BD}{AB} = \frac{3,5 \cdot 5}{2,5} = 7 \text{ (cm)}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{CD}{BD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow CD = \frac{BD^2}{AB} = \frac{5^2}{2,5} = 10 \text{ (cm)}.$$



ĐỀ SỐ 8

Cho tam giác ABC cân tại A và $\hat{A} > 90^\circ$. Lấy điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ là AB, vẽ tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = \widehat{AMB}$. Tia Bx cắt AM ở D.

- a) Chứng minh $\triangle AMB$ và $\triangle ADB$ đồng dạng.
b) Chứng minh $MB.MC = MA.MD$.

Giải

- a) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ADB$ có :

$$\widehat{ABD} = \widehat{AMB} \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BAD} \text{ chung}$$

Do đó $\triangle AMB \sim \triangle ADB$ (g.g)

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \text{ mà } \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \text{ (gt)}$$

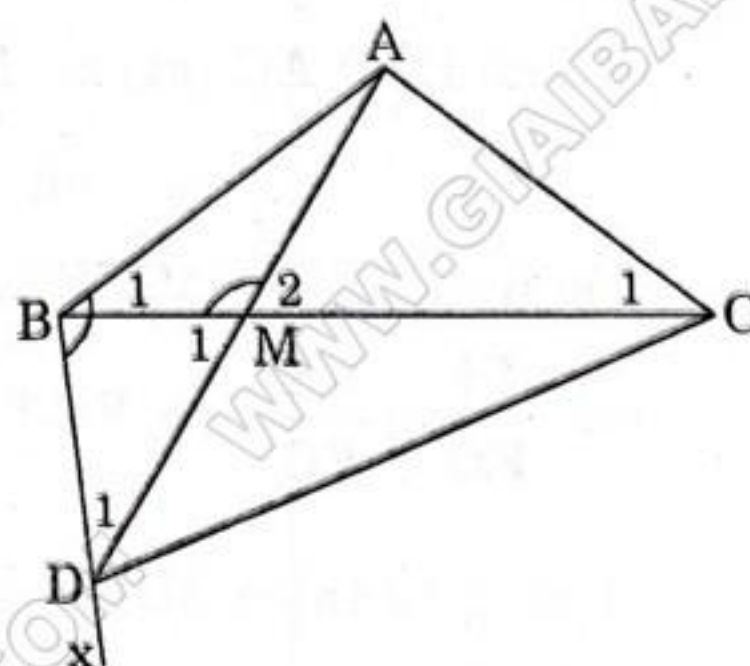
$$\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$$

- b) Xét $\triangle BMD$ và $\triangle AMC$ có : $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (đối đỉnh)

$$\hat{D}_1 = \hat{C}_1 \text{ (cmt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle BMD \sim \triangle AMC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC} \Rightarrow MB.MC = MA.MD.$$

Lưu ý thêm : Bạn có thể chứng minh được $\triangle MBA \sim \triangle MDC$ (c.g.c) nhờ kết luận của câu b.



ĐỀ SỐ 9

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) và O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

- a) Chứng minh $OA.OD = OB.OC$.

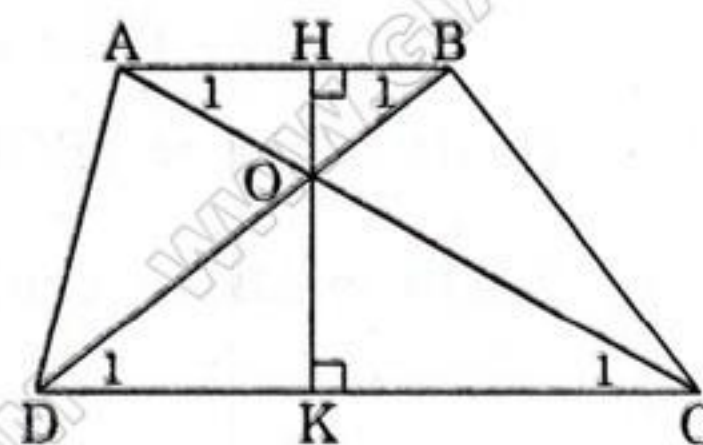
- b) Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt AB và CD lần lượt tại H và K. Chứng minh $OH.CD = OK.AB$.

Giải

- a) Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$ và $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$

Do đó $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OA.OD = OB.OC.$$



- b) Dễ thấy $\triangle AHO \sim \triangle CKO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{AH}{CK}$ (1)

$$\text{Tương tự } \triangle BHO \sim \triangle DKO \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{BH}{DK} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{AH}{CK} = \frac{BH}{DK} = \frac{AH + BH}{CK + DK} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow OH.CD = OK.AB.$$

ĐỀ SỐ 10

Qua điểm I nằm bên trong tam giác ABC, dựng ba đường thẳng song song với các cạnh của tam giác : $DE \parallel BC$; $MN \parallel CA$; $PQ \parallel AB$ (D, M thuộc AB; N, P thuộc BC; E, Q thuộc AC).

Chứng minh rằng : $\frac{BD}{BA} + \frac{AQ}{AC} + \frac{CN}{CB} = 1$.

Giải

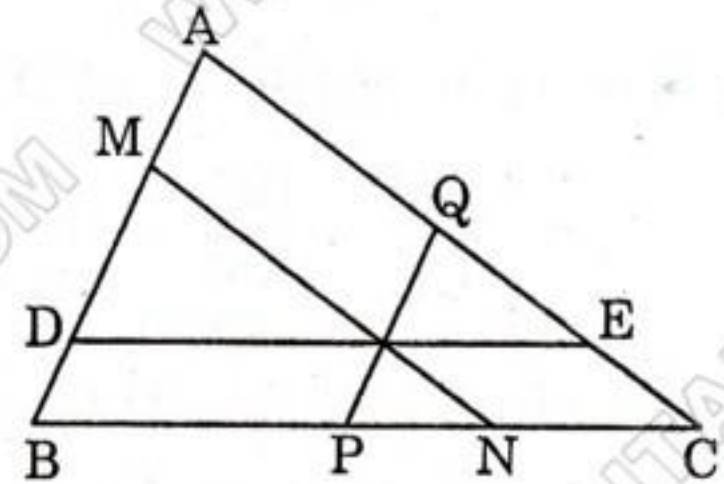
$DE \parallel BC$ (gt) theo định lí Talét : $\frac{BD}{BA} = \frac{CE}{AC}$

Lại có $\triangle QIE \sim \triangle ABC$ (vì $\hat{Q} = \hat{A}$, $\hat{E} = \hat{C}$)

$$\Rightarrow \frac{IE}{BC} = \frac{EQ}{AC}$$

Mặt khác dễ thấy tứ giác CNIE là hình bình hành nên $IE = CN$.

Do đó : $\frac{CN}{BC} = \frac{EQ}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BA} + \frac{AQ}{AC} + \frac{CN}{CB} = \frac{CE}{AC} + \frac{AQ}{AC} + \frac{EQ}{AC} = 1$.



ĐỀ SỐ 11

Cho hình vuông ABCD, trên các cạnh AB và BC lần lượt lấy các điểm P và Q sao cho $BP = BQ$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B đến PC. Chứng minh rằng $DH \perp QH$.

Giải

Ta có $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ (cùng phụ với \hat{P}_1).

Do đó $\triangle BHP \sim \triangle CHB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{BP}{CB} = \frac{BQ}{CD} \quad (1)$$

(vì $BQ = BP$ và $CB = CD$)

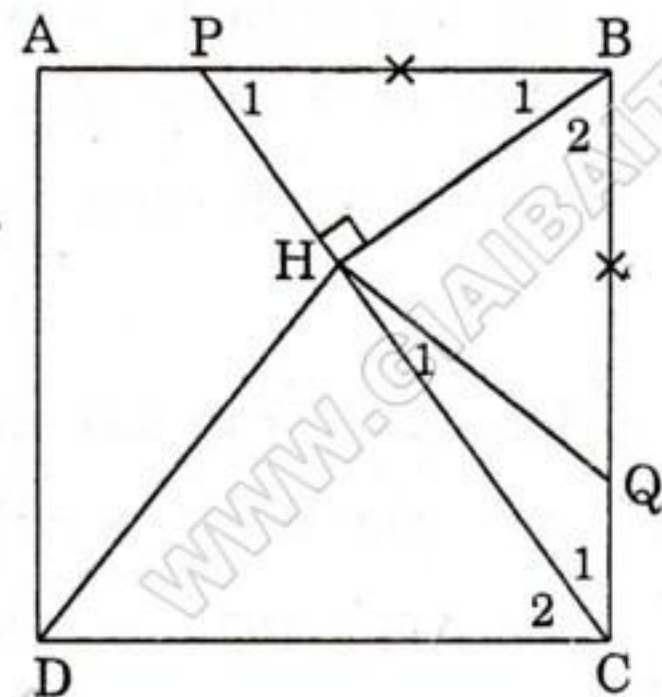
Xét $\triangle BHQ$ và $\triangle CHD$ có :

$\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ (cùng phụ với $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$) và (1).

Do đó $\triangle BHQ \sim \triangle CHD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BHQ} = \widehat{CHD}$

mà $\widehat{BHQ} + \hat{H}_1 = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{CHD} + \hat{H}_1 = 90^\circ$ hay $\widehat{DHQ} = 90^\circ$

Chứng tỏ $DH \perp QH$.



ĐỀ SỐ 12

Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^\circ$. Một đường thẳng bất kì qua C cắt tia đối của tia BA, DA lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh : $BM \cdot DN = BC \cdot DC$.

b) Gọi I là giao điểm của BN và DM. Tính \widehat{BID} .

Giải

a) Ta có : $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{C}_1$ (đồng vị)

Tương tự $\widehat{D}_1 = \widehat{A} = \widehat{B}_1$

Do đó $\triangle MBC \sim \triangle CDN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BM}{DC} = \frac{BC}{DN} \Rightarrow BM \cdot DN = BC \cdot DC \quad (1)$$

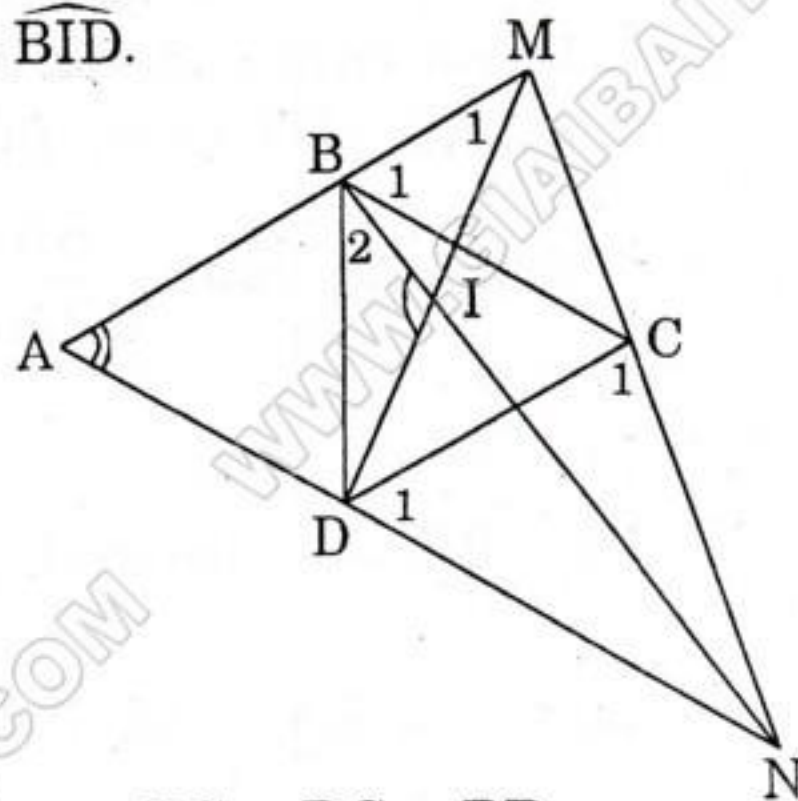
b) Hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $\triangle BCD$ đều $\Rightarrow BC = DC = BD$.

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow BM \cdot DN = BD^2 \quad (2)$$

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle BDN$ có $\widehat{MBD} = \widehat{BDN} = 120^\circ$ và (2).

Do đó $\triangle MBD \sim \triangle BDN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B}_2$.

Dễ thấy $\triangle MBD \sim \triangle BID$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BID} = \widehat{MBD} = 120^\circ$.



ĐỀ SỐ 13

Cho tam giác ABC cân tại A. Trên đường phân giác ngoài của góc A lấy hai điểm M và N về hai phía của A (M thuộc nửa mặt phẳng bờ AC chứa B, N thuộc nửa mặt phẳng còn lại) sao cho $AM \cdot AN = AB^2$.

Chứng minh rằng : $\triangle ANB \sim \triangle ACM$.

Giải

Kẻ đường cao AH của tam giác cân ABC ta có AH đồng thời là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow AH \perp MN$

mà $AH \perp BC \Rightarrow MN \parallel BC$

Vì $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_3$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_4$

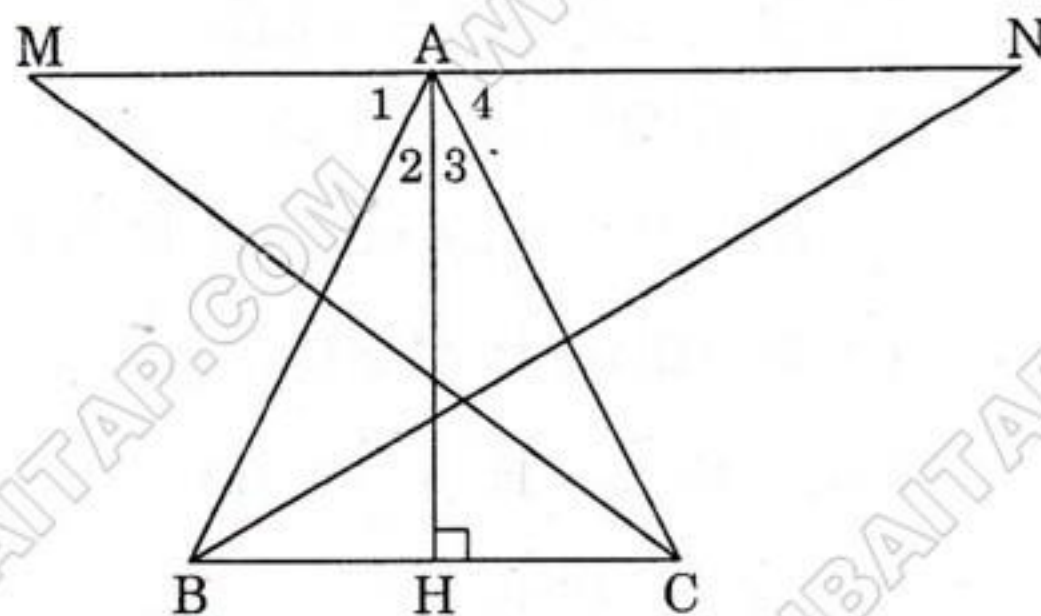
Do đó $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$ (1)

Mặt khác theo giả thiết ta có :

$$AM \cdot AN = AB^2 \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AN}$$

$$\text{mà } AB = AC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có : $\triangle ANB \sim \triangle ACM$ (c.g.c)



ĐỀ SỐ 14

Cho hình bình hành ABCD, đường chéo lớn AC. Từ C kẻ CE và CF lần lượt vuông góc với các đường thẳng AB và AD. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ B và D đến AC.

Chứng minh rằng : $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Giải

Xét hai tam giác vuông AHB và AEC có \widehat{A}_1 chung

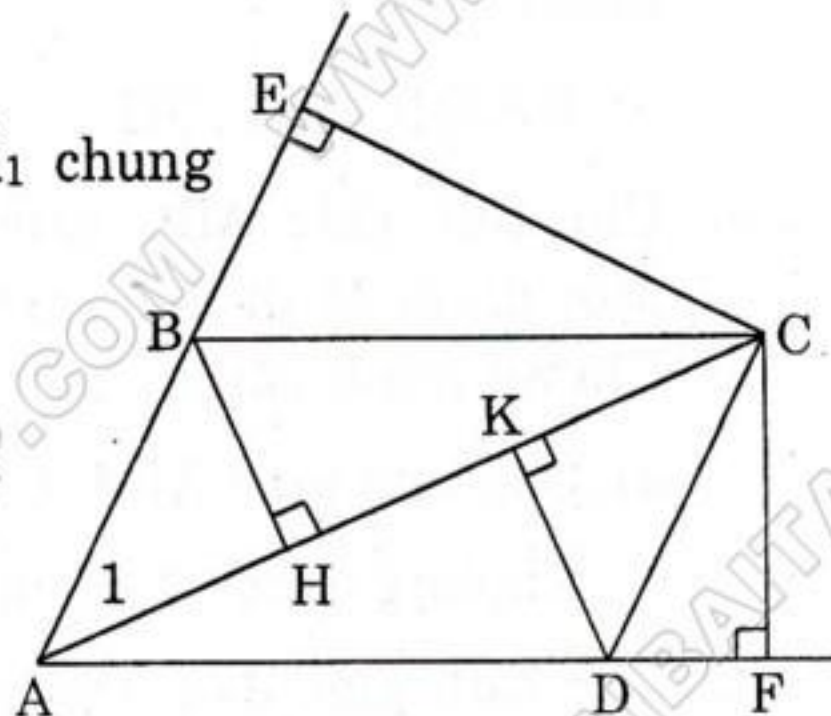
$\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle AEC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AH.AC \quad (1)$$

Tương tự $\triangle AKD \sim \triangle AFC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AK}{AF} \Rightarrow AD.AF = AK.AC \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB.AE + AD.AF &= (AH + AK)AC \\ &= (AH + KC)AC \quad (\text{vì } AH = KC) \\ &= AC^2. \end{aligned}$$



ĐỀ SỐ 15

Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Lấy một điểm M bất kì trên đường chéo AC, kẻ MP, MQ lần lượt vuông góc với BC và AD.

Chứng minh rằng : $\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1$.

Giải

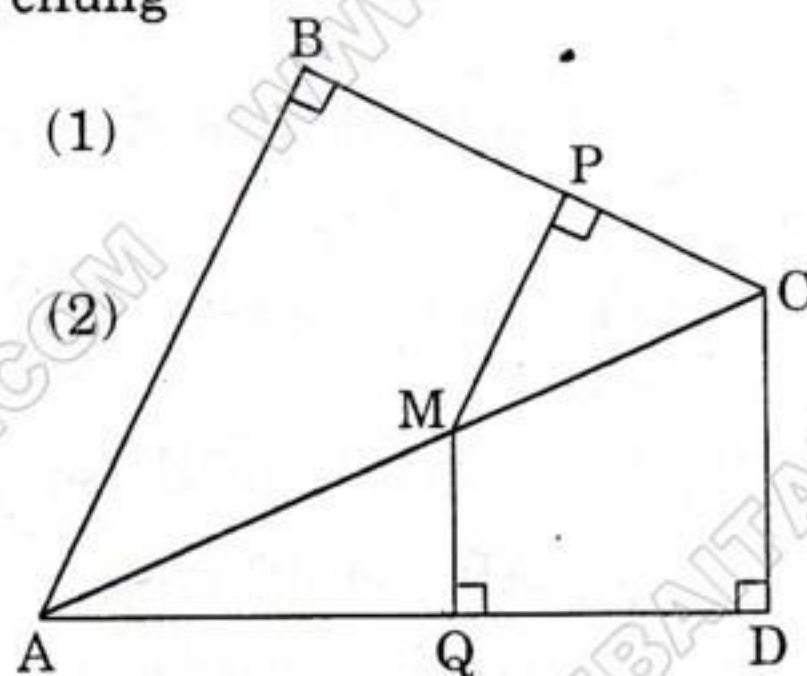
Xét hai tam giác vuông ABC và MPC có \widehat{C} chung

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MPC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{MC}{AC} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \triangle ADC \sim \triangle AQM \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{MA}{AC} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) :

$$\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = \frac{MC + MA}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1.$$



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. G là trọng tâm và O là giao điểm của ba đường trung trực. Chứng minh rằng G, H, O thẳng hàng và

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2} \text{ (đường thẳng Ole).}$$

2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $AC^2 = AB \cdot CD$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ và $\triangle CAD$ đồng dạng.
3. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là điểm di động trên cạnh AC, vẽ Cx vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H, cắt tia BA tại D. Chứng minh :
 - a) $DA \cdot DB = DC \cdot DH$.
 - b) Số đo góc \widehat{AHD} không đổi.
4. Cho tam giác ABC cân tại B. Gọi I là trung điểm của cạnh đáy AC. Một điểm M di động trên cạnh AB, lấy điểm N sao cho $IA^2 = CN \cdot AM$. Chứng minh rằng :
 - a) Các tam giác AIM, CNI, INM đồng dạng.
 - b) Khoảng cách từ I đến MN không đổi khi M di động trên cạnh AB.
5. Cho tam giác đều ABC và G là trọng tâm, M là điểm bất kì trên BC, kẻ MH, MK lần lượt vuông góc với AB và AC. Gọi P là giao điểm của MH với BG, Q là giao điểm của MK với CG.
 - a) Chứng minh tứ giác GQMP là hình bình hành.
 - b) Gọi R là giao điểm của HK và GM, chứng tỏ R là trung điểm của HK.

Hướng dẫn

1. Gọi các trung điểm của ba cạnh AB, BC, CA là M, N, P ta có :

$$\triangle MNP \sim \triangle ABC \text{ (c.c.c) và } k = \frac{1}{2}.$$

Khi đó $ON \parallel AH$ mà $MP \parallel BC \Rightarrow ON \perp MP$.

Chứng tỏ ON là đường cao của $\triangle MNP$, chứng minh tương tự ta có OP là đường cao. Do đó O là trực tâm của $\triangle MNP \Rightarrow \frac{ON}{AH} = \frac{1}{2}$.

Giả sử G' là giao điểm của OH và AN ta có : $\frac{G'N}{AG'} = \frac{ON}{AH} = \frac{1}{2}$.

Vì G là trọng tâm : $\frac{GA}{GN} = \frac{1}{2}$. Vậy G' và G phải trùng nhau.

2. Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (so le trong) và $AC^2 = AB \cdot CD$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CAD$ (c.g.c).

3. a) $\triangle DAC \sim \triangle DHB$ (g.c.g) $\Rightarrow DA \cdot DB = DC \cdot DH$ (1)

b) $\triangle DHA \sim \triangle DBC$ có \widehat{D} chung và (1) nên $\triangle DHA \sim \triangle CAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DHA} = \widehat{DBC}$ không đổi.

4. a) Ta có $\widehat{A} = \widehat{C}$ (gt) và $AI^2 = CN \cdot AM \Rightarrow \frac{CN}{AI} = \frac{AI}{AM}$ ($AI = CI$)

$$\Rightarrow \frac{CN}{AI} = \frac{CI}{AM} \Rightarrow \triangle AIM \sim \triangle CNI \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{CNI}, \widehat{NIC} = \widehat{AMI} \text{ và } \frac{CN}{CI} = \frac{AI}{AM} = \frac{IN}{AM}$$

b) Gọi IH là khoảng cách từ I đến MN, IK là khoảng cách từ I đến cạnh BC.

Ta chứng minh $\triangle IHN = \triangle IKN$ (ch.gn) $\Rightarrow IH = IK$ không đổi.

5. a) Tứ giác GQMP là hình bình hành vì có các cạnh đối song song.

b) Các tam giác sau đây đồng dạng :

$$\left. \begin{array}{l} \triangle MPB \sim \triangle MQC \Rightarrow \frac{MQ}{MP} = \frac{MC}{MB} \\ \triangle MHB \sim \triangle MKC \Rightarrow \frac{MK}{MH} = \frac{MC}{MB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MQ}{MP} = \frac{MK}{MH}$$

Do đó theo định lí Talét đảo HK // PQ.

O là giao điểm của GM và PQ \Rightarrow O là trung điểm của PQ.

$$\text{Lại có } \frac{OP}{RH} = \frac{OQ}{RK} \text{ mà } OP = OQ \Rightarrow RH = RK.$$

§8, 9. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

Ứng dụng thực tế

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

* Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu :

a) Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.

hoặc

b) Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.

c) Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

* Tỉ số đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

* Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho tam giác ABC vuông tại A, một đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt các đường thẳng AC và AB lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh : $DB \cdot DC = DE \cdot DF$.

b) Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$, biết $HB = 3\text{cm}$, $HC = 12\text{cm}$. Tính đường cao AH.

Giải

a) Ta có $\hat{F} = \hat{C}$ (cùng phụ với \hat{B}).

Do đó hai tam giác vuông $\triangle BDF \sim \triangle EDC$ (g.g)

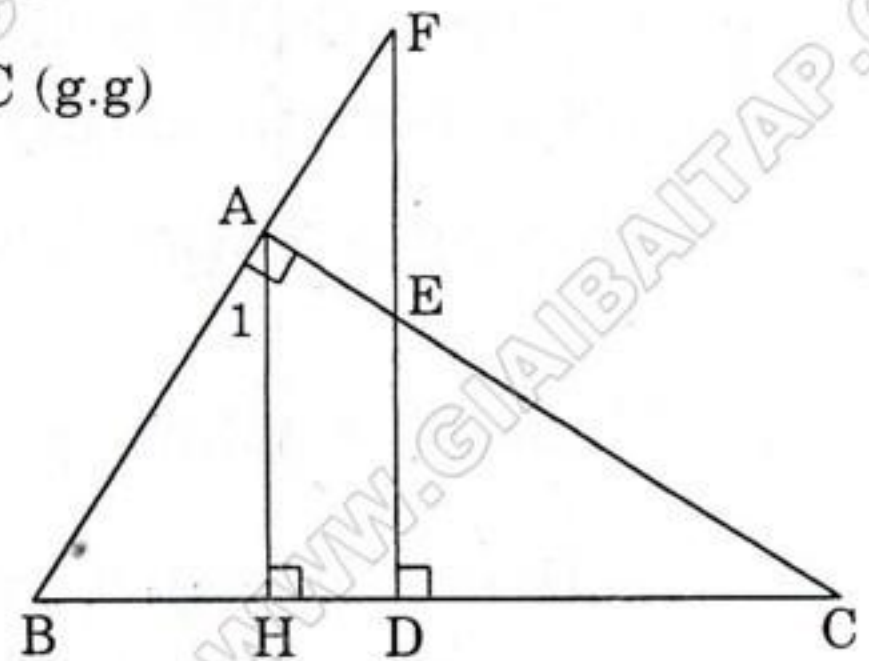
$$\Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{DF}{DC} \Rightarrow DB \cdot DC = DE \cdot DF.$$

b) Ta có $\hat{A}_1 = \hat{C}$ (cùng phụ với \hat{B}).

Do đó $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA}$$

$$\Rightarrow AH^2 = CH \cdot BH = 12 \cdot 3 = 36 \Rightarrow AH = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$



ĐỀ SỐ 2

Kẻ đường cao BD và CE của tam giác ABC và các đường cao DF và EG của tam giác ADE.

a) Chứng minh $AD \cdot AE = AB \cdot AG = AC \cdot AF$.

b) Chứng minh : $FG \parallel BC$.

Giải

a) Xét $\triangle ADB$ và $\triangle AGE$ có \hat{A} chung và $\widehat{ADB} = \widehat{AGE} = 90^\circ$ (gt)

nên $\triangle ADB \sim \triangle AGE$ (g.g)

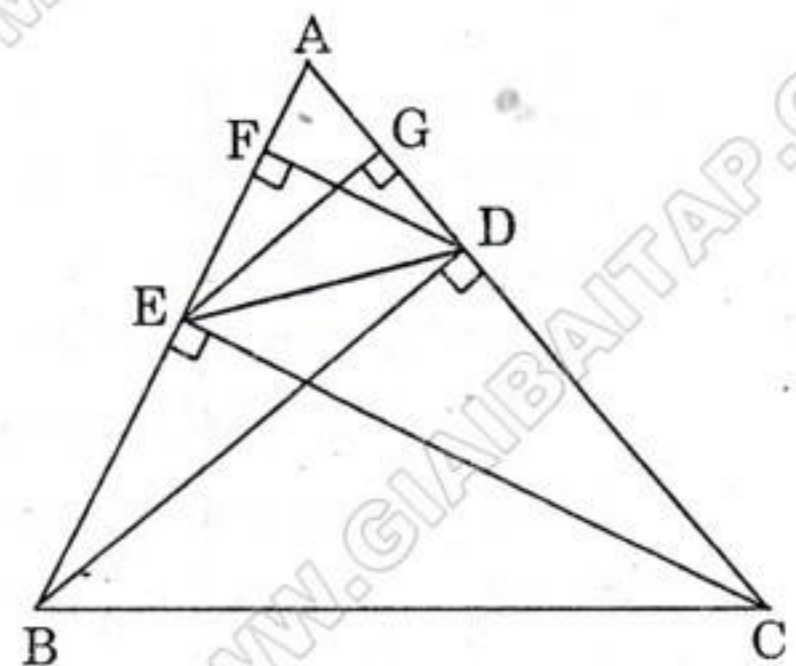
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AG \quad (1)$$

Tương tự $\triangle ADF \sim \triangle ACE$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AC \cdot AF \quad (2)$$

b) Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \cdot AG = AC \cdot AF$.

Theo định lí Talét đảo $\Rightarrow FG \parallel BC$.



ĐỀ SỐ 3

Cho tam giác nhọn ABC với H là trực tâm. Trên các đoạn thẳng HB và HC lấy các điểm B₁ và C₁ sao cho $\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^\circ$.

Chứng minh rằng : $AB_1 = AC_1$.

Giải

Kẻ các đường cao BD và CE ta có :

$$\Delta AB_1C \sim \Delta ADB_1 \text{ (g.g) (có } \widehat{B_1AC} \text{ chung)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB_1}{AD} = \frac{AC}{AB_1} \Rightarrow AB_1^2 = AC \cdot AD \quad (1)$$

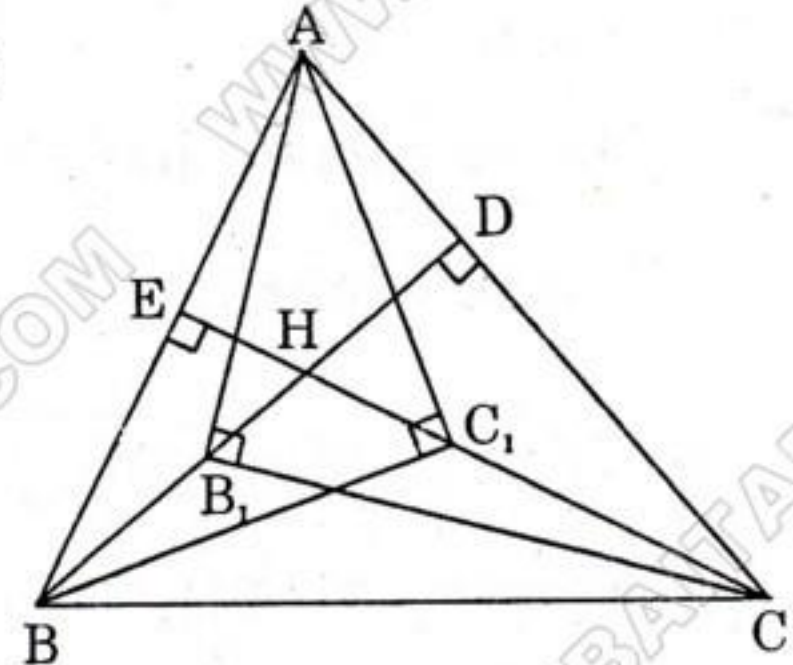
Chứng minh tương tự ta có :

$$\Delta AC_1D \sim \Delta AEC_1 \Rightarrow AC_1^2 = AB \cdot AE \quad (2)$$

Lại có $\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (Â chung)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AD \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có : $AB_1 = AC_1$.



ĐỀ SỐ 4

Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Qua G dựng một đường thẳng d bất kì cắt hai cạnh AB và AC. Từ A, B, C hạ các đường vuông góc AA₁, BB₁, CC₁ xuống đường thẳng d. Chứng minh rằng : $AA_1 = BB_1 + CC_1$.

Giải

Gọi AD là đường trung tuyến của ΔABC . Từ D dựng DD₁ vuông góc với d. Dễ thấy DD₁ là đường trung bình của hình thang BB₁CC₁ nên :

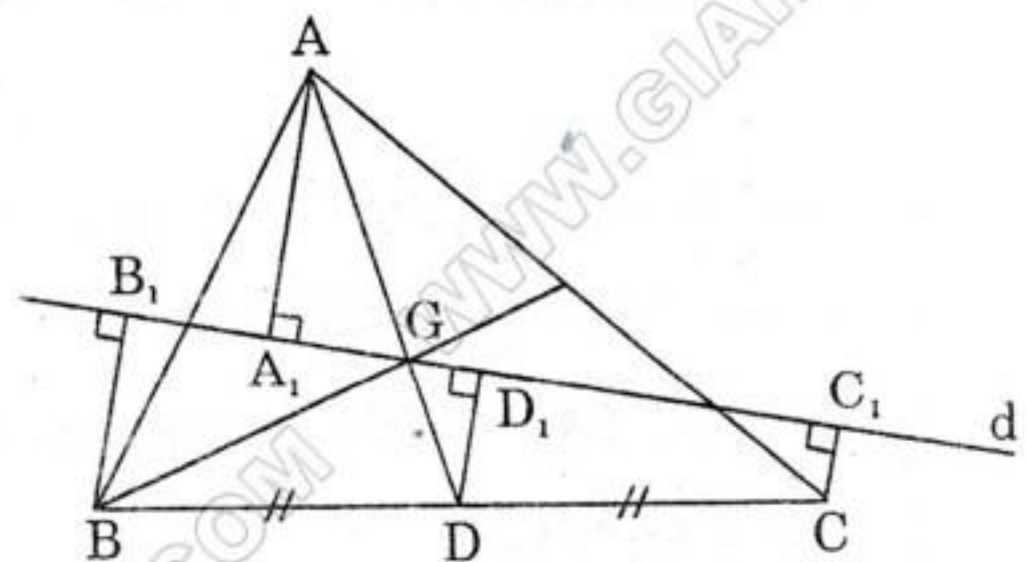
$$DD_1 = \frac{BB_1 + CC_1}{2}$$

$$\Rightarrow 2DD_1 = BB_1 + CC_1 \quad (1)$$

Ta lại có hai tam giác vuông AGA₁ và DGD₁ đồng dạng (vì $\widehat{AGA_1} = \widehat{DGD_1}$)

$$\Rightarrow \frac{AA_1}{DD_1} = \frac{AG}{GD} = 2 \Rightarrow AA_1 = 2DD_1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $AA_1 = BB_1 + CC_1$.



ĐỀ SỐ 5

Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Tia phân giác của góc ABC cắt AH ở D và cắt AC ở E.

a) Chứng minh : $AB.HD = AE.HB$.

b) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABE và BHD biết $AB = 6\text{cm}$ và $AC = 8\text{cm}$.

Giải

a) Ta có BE là phân giác của \widehat{ABC} (gt)

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

Do đó hai tam giác vuông :

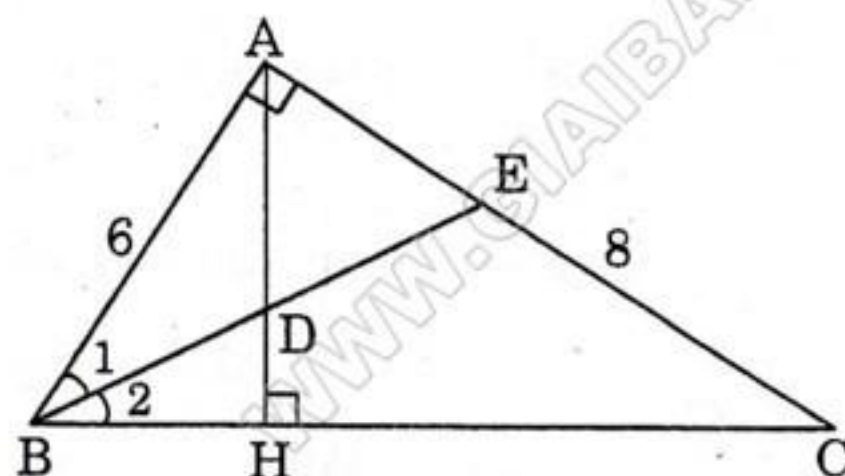
$$\triangle BAE \sim \triangle BHD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{AE}{HD} \Rightarrow AB.HD = AE.HB.$$

b) Ta có : $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)}$ (định lí Py-ta-go)

Xét hai tam giác vuông AHB và CAB có \hat{B} chung nên

$$\triangle AHB \sim \triangle CAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow HB = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ (cm)}$$

$$\triangle BAE \sim \triangle BHD \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{S_{BAE}}{S_{BHD}} = \left(\frac{AB}{HB}\right)^2 = \left(\frac{6}{3,6}\right)^2 \approx 2,8.$$



ĐỀ SỐ 6

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 2\hat{C}$ và đường cao AD.

a) Chứng tỏ $\triangle ADB$ và $\triangle ABC$ đồng dạng.

b) Kẻ phân giác của góc ABC cắt AD tại F và AC tại E.

Chứng tỏ : $AB^2 = AE.AC$.

Giải

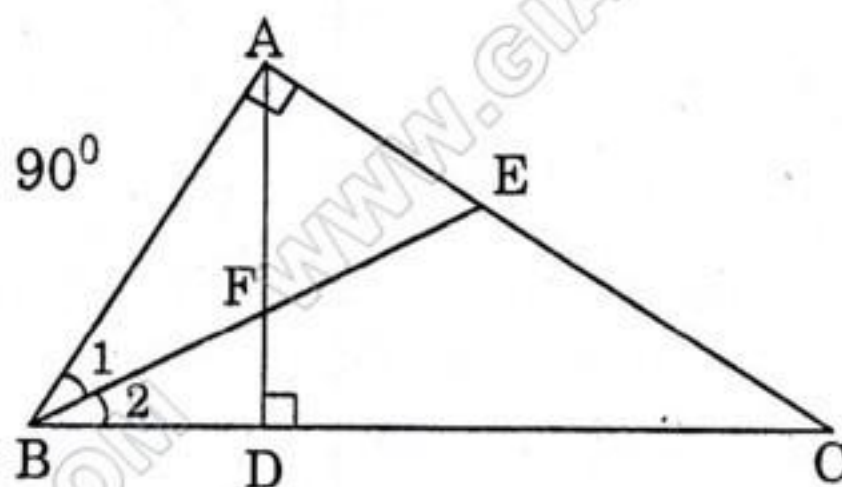
a) $\triangle ADB$ và $\triangle ABC$ có \hat{B} chung; $\widehat{ADB} = \hat{A} = 90^\circ$

nên $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ (g.g).

b) $\hat{B} = 2\hat{C}$ (gt) và BE là phân giác nên

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}.$$

$$\text{Do đó } \triangle BAE \sim \triangle CAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE.AC.$$



ĐỀ SỐ 7

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) đường cao AH, biết $BC = 5\text{cm}$, $BH = 1,8\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của BC, đường trung trực của BC cắt AC tại D.

a) Tính AB, AH.

b) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác DMC và ABC.

Giải

a) Ta có hai tam giác vuông AHB và CHA có

$\hat{A}_1 = \hat{C}$ (cùng phụ với \hat{B}) nên

$\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$$

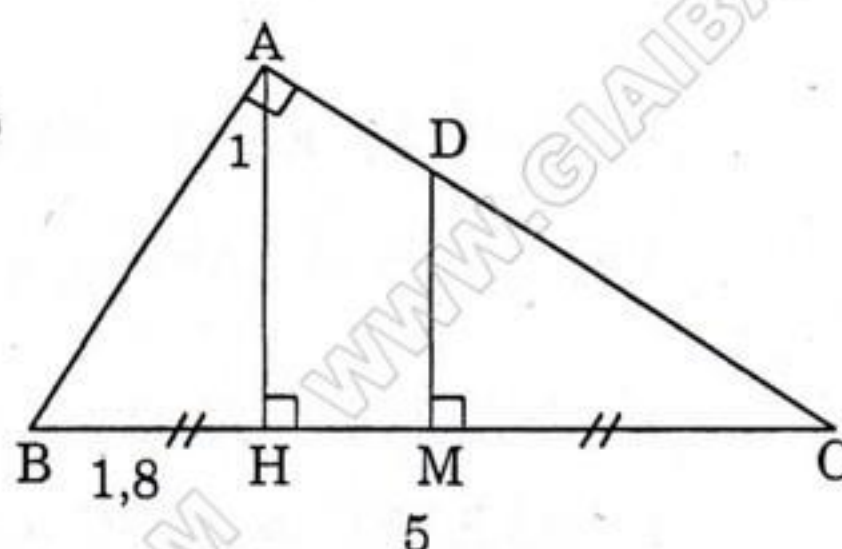
$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH = 1,8 \cdot 3,2 \quad (\text{vì } CH = BC - BH)$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{1,8 \cdot 3,2} = 2,4 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó : } AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{2,4^2 + 1,8^2} = 3 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \text{ (định lí Py-ta-go)}$$

$$= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (cm).}$$



b) Hai tam giác vuông DMC và BAC có \hat{C} chung. Do đó :

$$\triangle DMC \sim \triangle BAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{DMC}}{S_{BAC}} = \left(\frac{MC}{AC} \right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{2}}{4} \right)^2 = \frac{25}{64}.$$

ĐỀ SỐ 8

Cho tam giác ABC. Từ điểm I bất kì nằm giữa A và B, kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại J.

a) Chứng minh : $\triangle AIJ$ và $\triangle ABC$ đồng dạng.

b) Xác định vị trí của I trên cạnh AB sao cho $S_{AIJ} = \frac{1}{9} S_{ABC}$.

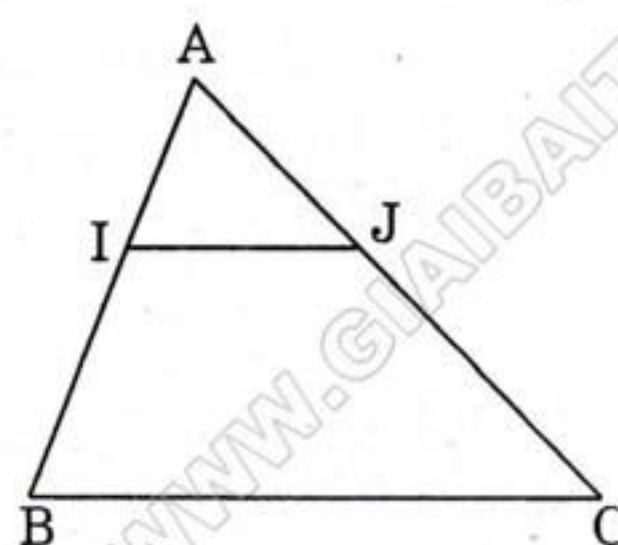
Giải

a) Ta có : $IJ \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow \triangle AIJ \sim \triangle ABC$ (g.g).

$$\text{b) } S_{AIJ} = \frac{1}{9} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{AIJ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{9} \text{ mà } \frac{S_{AIJ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AI}{AB} \right)^2$$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{AI}{AB} \right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{1}{3} \text{ (vì } k > 0)$$

$$\Rightarrow IA = \frac{1}{3} AB.$$



ĐỀ SỐ 9

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng : $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng.

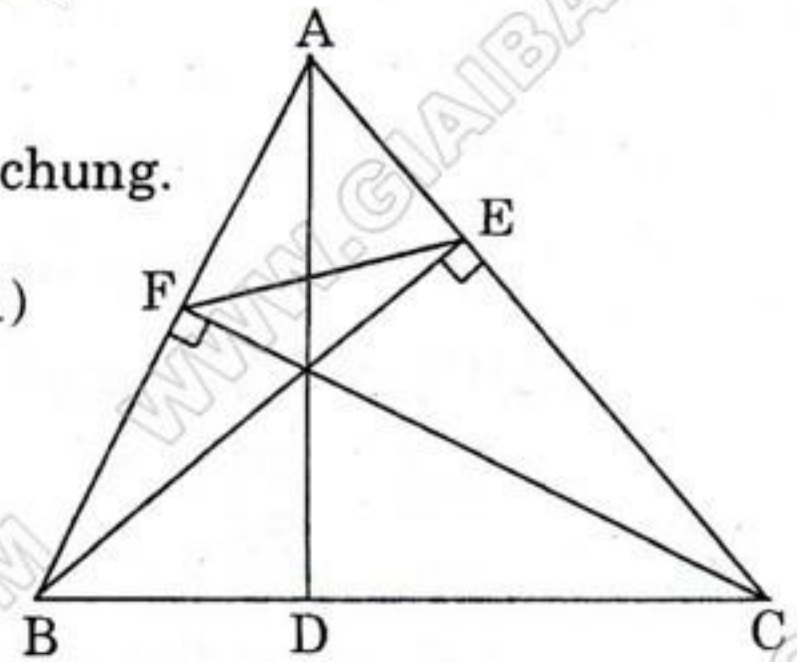
Giải

Xét hai tam giác vuông AEB và AFC có A chung.

$$\text{Vậy } \triangle AEB \sim \triangle AFC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có \hat{A} chung và (1).

Do đó $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c).



ĐỀ SỐ 10

Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, và $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Gọi E là giao điểm của đường thẳng AD và BC. Chứng minh rằng :

a) $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

b) $\triangle AOD$ và $\triangle BOC$ đồng dạng và $EA \cdot ED = EB \cdot EC$.

Giải

a) Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COD$ có :

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \text{ (đối đỉnh),}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} \text{ (gt)}$$

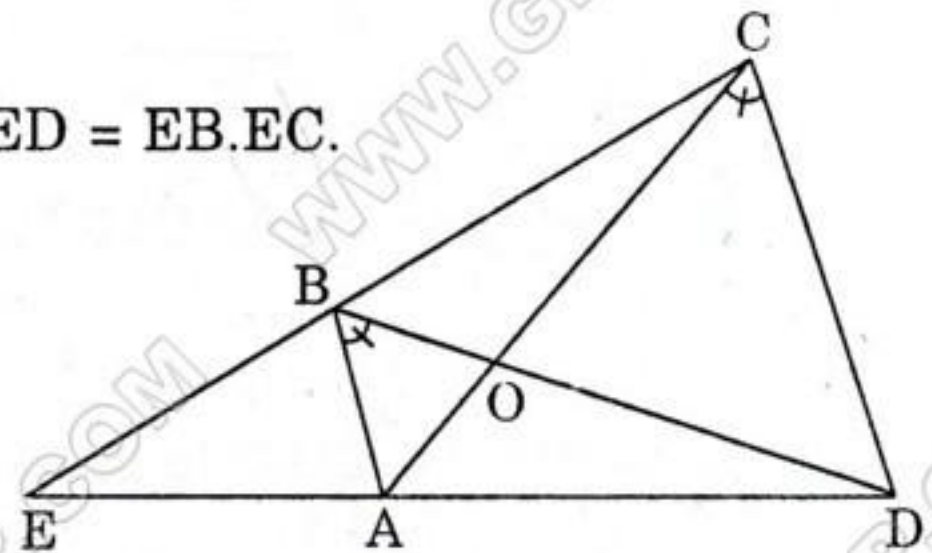
$$\text{Vậy } \triangle AOB \sim \triangle COD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow OA \cdot OC = OB \cdot OD \quad (1)$$

b) Xét $\triangle AOD$ và $\triangle BOC$ có $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (đối đỉnh) và (1) nên

$$\triangle AOD \sim \triangle BOC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BCA} \quad (2)$$

Xét $\triangle EDB$ và $\triangle ECA$ có \hat{E} chung và (2)

$$\Rightarrow \triangle EDB \sim \triangle ECA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA} \Rightarrow EA \cdot ED = EB \cdot EC.$$



ĐỀ SỐ 11

Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = 10\text{cm}$, đường cao $AH = 4\text{cm}$. Kẻ HI, HK lần lượt vuông góc với AB và AC. Tính diện tích tứ giác AIHK.

Giải

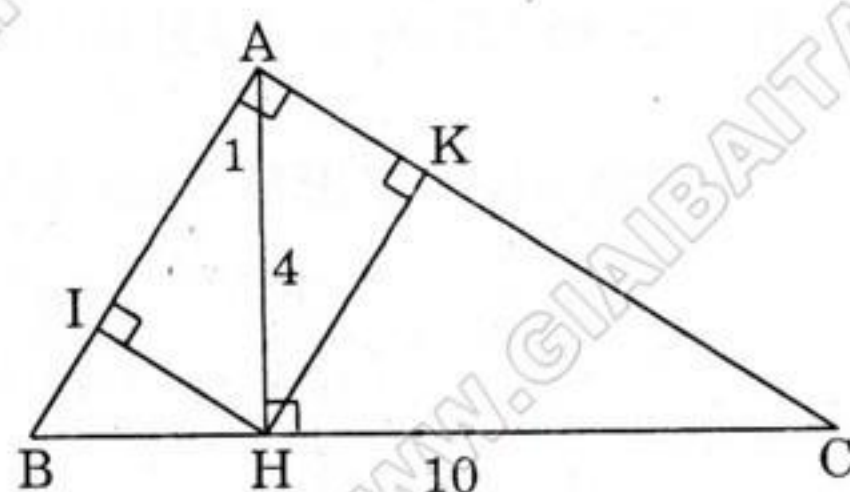
Ta có $\hat{A}_1 = \hat{C}$ (cùng phụ với \hat{B}). Do đó $\triangle AIH \sim \triangle CAB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{AIH}}{S_{CAB}} = \left(\frac{AH}{BC}\right)^2 = \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} 4 \cdot 10 = 20 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Ta có : } \frac{S_{AIH}}{20} = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow S_{AIH} = \frac{20 \cdot 4}{25} = 3,2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Dễ thấy tứ giác AIHK là hình chữ nhật (3 góc vuông)

$$\Rightarrow S_{AIHK} = 2S_{AIH} = 6,4 \text{ cm}^2.$$

ĐỀ SỐ 12

Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD chia cạnh huyền thành hai đoạn có độ dài 1cm và 3cm. Hỏi đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỉ số nào?

Giải

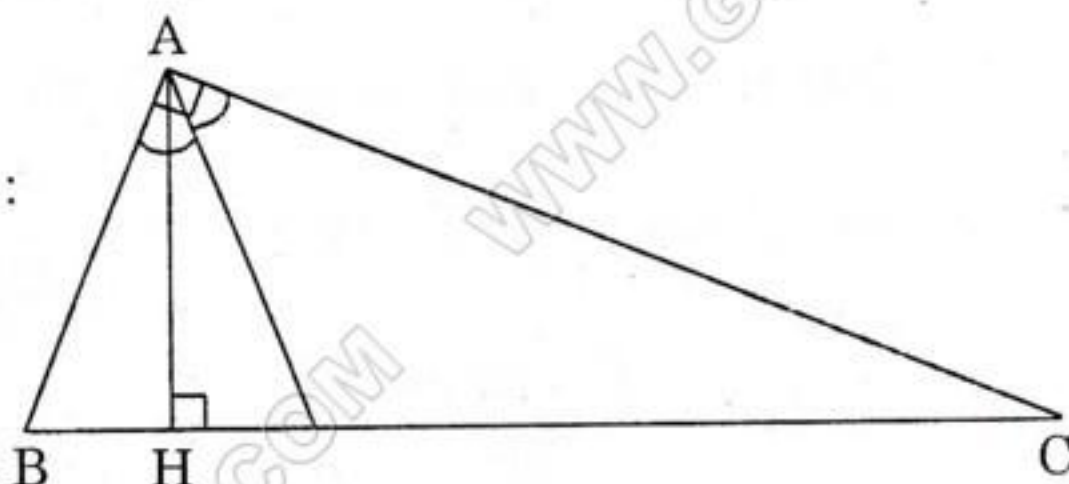
AD là phân giác của $\triangle ABC$ ta có :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{1}{3}$$

Lại có $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (gg)

$$\Rightarrow \frac{S_{AHB}}{S_{CHA}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ hay } \frac{BH}{CH} = \frac{1}{9}.$$

Vậy đường cao kẻ xuống cạnh huyền chia cạnh huyền thành hai đoạn theo tỉ số $\frac{1}{9}$.



ĐỀ SỐ 13

Cho tam giác ABC nhọn và hai đường cao AH, BK.

a) Chứng minh : $\triangle CKH \sim \triangle CBA$.

b) Tính diện tích tam giác CKH biết $HA = 18\text{cm}$, $BC = 44\text{cm}$ và $CK = 20\text{cm}$.

Giải

a) Dễ thấy $\triangle CHA \sim \triangle CKB$ (g.g) ($\widehat{CHA} = \widehat{CKB} = 90^\circ$ và \widehat{C} chung)

$$\Rightarrow \frac{CH}{CK} = \frac{CA}{CB}$$

Do đó $\triangle CKH \sim \triangle CBA$ (c.g.c).

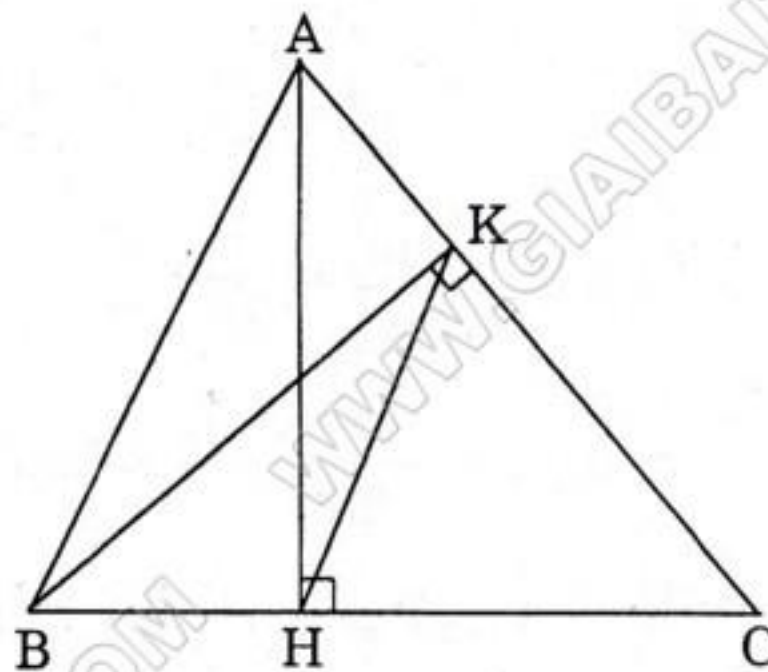
b) Ta có : $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}18.44 = 396 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Mặt khác $\triangle CKH \sim \triangle CBA$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{S_{CKH}}{S_{CBA}} = \left(\frac{CK}{CB}\right)^2 = \left(\frac{20}{44}\right)^2 = \frac{25}{121}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CKH}}{396} = \frac{25}{121}$$

$$\Rightarrow S_{CKH} = \frac{396.25}{121} \approx 81,8 \text{ cm}^2.$$



ĐỀ SỐ 14

Cho tam giác ABC nhọn, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, biết BE = 5cm, EC = 4cm, EA = 2cm. Tính HC và HA.

Giải

Xét hai tam giác vuông AEB và AFC có $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ (cùng phụ với \hat{A})

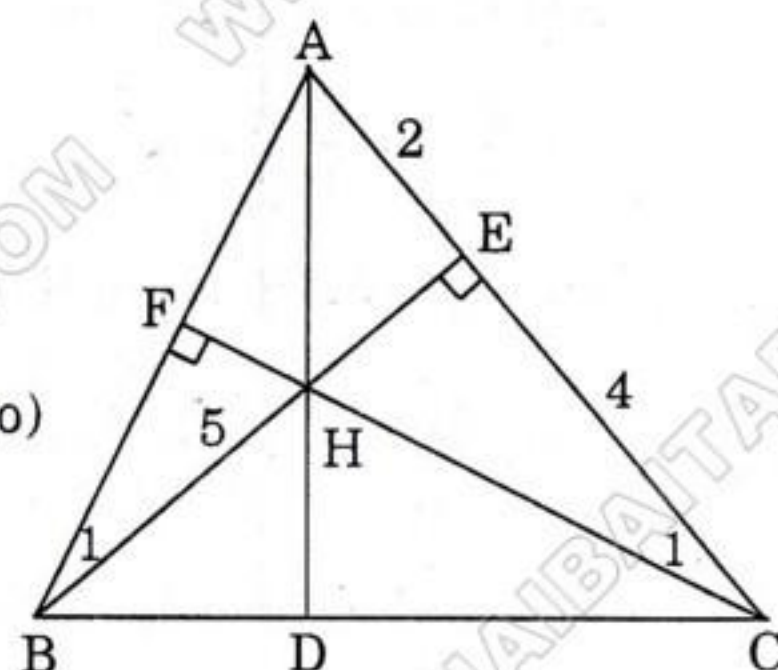
$$\Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle HEC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{AE}{HE}$$

$$\Rightarrow HE = \frac{CE.AE}{BE} = \frac{4.2}{5} = \frac{8}{5}$$

Ta có : $HC = \sqrt{HE^2 + CE^2}$ (định lý Py-ta-go)

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + 4^2} \approx 4,3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Tương tự : } HA = \sqrt{AE^2 + HE^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} \approx 2,6 \text{ (cm).}$$



ĐỀ SỐ 15

Cho tam giác ABC có AB = 2cm, AC = 4cm. Qua B dựng đường thẳng cắt cạnh AC tại D sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

a) Chứng tỏ $\triangle ABD$ và $\triangle ACB$ đồng dạng, tính AD.

b) Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao của $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$.

Chứng tỏ : $S_{ABH} = 4S_{ADK}$.

Giải

a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACB$ có \hat{A} chung và $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$ (gt)

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

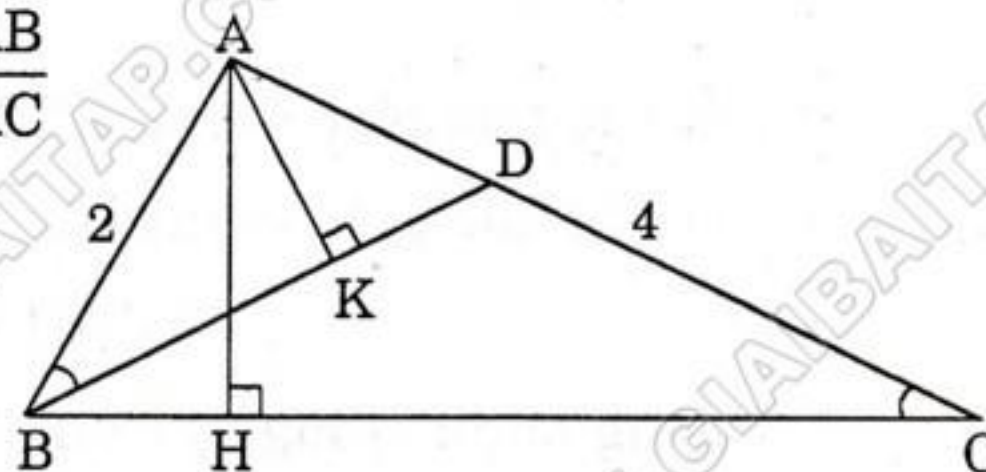
$$\Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{2^2}{4} = 1.$$

$$\text{b) } \triangle ABD \sim \triangle ACB \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABC}.$$

$$\text{Do đó } \triangle AHB \sim \triangle AKD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{AHB}}{S_{AKD}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow S_{AHB} = 4S_{AKD}.$$



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE, CF và H là trực tâm. Chứng minh rằng :

$$\text{a) } \triangle AEF \text{ và } \triangle ABC \text{ đồng dạng}$$

$$\text{b) } AD \cdot HD = DB \cdot DC$$

$$\text{c) } AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$$

$$\text{d) } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1.$$

2. Trên cạnh AB của tam giác ABC lấy các điểm M, N sao cho :

$$AM : MN : NB = 1 : 2 : 3.$$

Qua các điểm M, N dựng các đường thẳng song song với BC. Tính diện tích phần của tam giác bao gồm giữa hai đường thẳng này, biết diện tích tam giác ABC bằng S.

3. Diện tích hình thang ABCD bằng 6cm^2 . Gọi E là giao điểm của hai cạnh bên kéo dài, một đường thẳng qua E và giao điểm O của hai đường chéo cắt đáy nhỏ BC tại P, đáy lớn AD tại Q. F là điểm thuộc đoạn EC sao cho $\frac{EF}{FC} = \frac{EP}{EQ} = \frac{1}{3}$. Tính diện tích tam giác PEF.

4. Cho hình bình hành ABCD. Từ một điểm O trên đường chéo AC dựng OE, OF vuông góc với AB, AD. Chứng minh : $\frac{OE}{OF} = \frac{AD}{AB}$.

5. Cho tam giác ABC cân tại A, từ trung điểm H của cạnh đáy BC kẻ HE vuông góc với AC. Gọi O là trung điểm của HE. Chứng minh các đường thẳng BE và AO vuông góc với nhau.

Hướng dẫn

1. a) Xét các tam giác vuông AFC và AEB đồng dạng suy ra :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)}$$

b) Xét các tam giác vuông ADB và CDH đồng dạng.

c) Xét các tam giác vuông AHE và BHD đồng dạng

$$\Rightarrow AH \cdot HD = BH \cdot HE.$$

Chứng minh tương tự : $AH \cdot HD = CH \cdot HF.$

d) Có $\frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} = \frac{HD}{AD}$. Tương tự : $\frac{S_{CHA}}{S_{ABC}} = \frac{HE}{BE}$; $\frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = \frac{HF}{CF}$

$$\Rightarrow \frac{S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB}}{S_{ABC}} = \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$$

Ta có : $S_{BHC} + S_{CHA} + S_{AHB} = S_{ABC}.$

2. Gọi M', N' tương ứng là giao điểm của AC với hai đường thẳng đã cho

$$S_{ABC} \sim S_{AMM'} \Rightarrow \frac{S_{AMM'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 \Rightarrow S_{AMM'} = \frac{1}{36} \cdot S$$

Tương tự : $S_{ANN'} = \frac{1}{4} S.$ Vậy $S_{MM'NN'} = \frac{1}{4} S - \frac{1}{36} S = \frac{2}{9} S.$

3. Dựng qua O đường thẳng song song với 2 đáy cắt AB, CD lần lượt tại K và L. Dễ dàng chứng minh được $OK = OL$; $BP = CP$; $AQ = QD$.

Lại có : $\frac{PC}{QD} = \frac{EP}{EQ} = \frac{1}{3}$; $\frac{BE}{AE} = \frac{1}{3}.$

Do đó : $\frac{S_{BEC}}{S_{AED}} = \frac{BE}{AE} \cdot \frac{EC}{ED} = \frac{1}{9}$ hay $\frac{S_{BED}}{S_{BEC} + S_{ABCD}} = \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow S_{BEC} = \frac{3}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$\frac{EF}{FC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EF}{EC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{PEF}}{S_{PEC}} = \frac{EF}{EC} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{PEF} = \frac{1}{4} S_{PEC} = \frac{3}{32} \text{ (đvdt)}.$$

4. Kẻ $OP \parallel AD$, $OQ \parallel AB$ ta có :

$$\triangle OEP \sim \triangle OFQ \text{ (vì } \hat{P} = \hat{Q}) \Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{OP}{OQ} = \frac{OP}{AP}.$$

Lại có $\triangle APO \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{OP}{BC} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \frac{OP}{AP} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}.$

5. Kẻ $BD \perp AC$ ta có : $\triangle CBD \sim \triangle AEH \Rightarrow \frac{CB}{AH} = \frac{CD}{HE}$

Lại có BE và OA là các trung tuyến của các $\triangle CBD$ và $\triangle AHE$

$$\Rightarrow \frac{BE}{AO} = \frac{CE}{HO} = \frac{CB}{HA}.$$

Do đó $\triangle CBE \sim \triangle HAO \Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{HAO}$ mà $AH \perp BC \Rightarrow AO \perp BE$.

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA MỘT TIẾT

ĐỀ SỐ 1

1. Cho hình bình hành ABCD, một đường thẳng qua A cắt BD, BC và DC theo thứ tự tại E, K, G.

a) Chứng minh : $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}.$

b) Cho $AB = 3\text{cm}$; $AD = 5\text{cm}$. Tính tích $BK.DG$.

2. Cho tam giác ABC, trung tuyến AD, biết $AB = 4\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$. Qua B dựng đường thẳng cắt AC tại F sao cho góc ABF bằng góc ACB.

a) Chứng tỏ tam giác ABF và tam giác ABC đồng dạng. Tính độ dài đoạn CF.

b) Chứng tỏ diện tích tam giác ABC bằng hai lần diện tích tam giác ADC.

c) Gọi Q là giao điểm của BF và AD, CO cắt AB tại E. Từ A và C lần lượt dựng các đường thẳng song song với BF cắt CO tại J và cắt AD tại I.

* Chứng tỏ $\frac{FC}{FA} = \frac{CI}{JA}.$

* Chứng tỏ $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB} = 1.$

Giải

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ a) Ta có : } BC \parallel AD \Rightarrow \frac{AK}{AE} = \frac{DB}{DE} \\ AB \parallel DG \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{AG}{EG} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{AK}{AE} = \frac{AG}{EG} \Rightarrow AK.EG = AG.AE$$

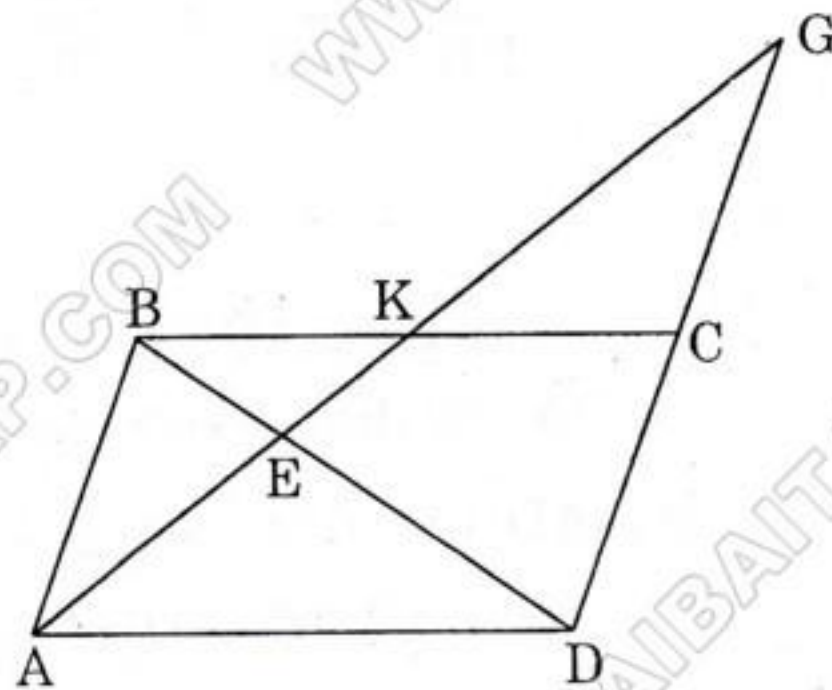
$$\Rightarrow AK(AG - AE) = AG.AE$$

$$\Rightarrow AK.AG - AK.AE = AG.AE$$

$$\Rightarrow AK.AG = AE(AG + AK)$$

Chia cả 2 vế cho $AK.AG.AE$

$$\Rightarrow \frac{1}{AE} = \frac{AG + AK}{AK.AG} \Rightarrow \frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \text{ (đpcm).}$$



b) Ta có : $\frac{BK}{AD} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DG} \Rightarrow BK \cdot DG = AB \cdot AD = 5 \cdot 3 = 15 \text{ (cm)}.$

2. a) Xét $\triangle ABF$ và $\triangle ABC$ có :

\hat{A} chung;

$\widehat{ABF} = \widehat{ACB}$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle ACB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB^2 = AF \cdot AC$

$\Rightarrow AF = \frac{AB^2}{AC} = \frac{4^2}{8} = 2 \text{ (cm)}$

$\Rightarrow CF = AC - AF = 8 - 2 = 6 \text{ (cm)}.$

b) Ta có $DB = DC$ (AD là trung tuyến của $\triangle ABC$)

$\Rightarrow S_{ADB} = S_{ADC}$ (chung đường cao kẻ từ A và đáy $DB = DC$)

$\Rightarrow S_{ADB} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{ADB}.$

c) * Ta có $Cx \parallel BF$ (gt). Theo định lí Talét : $\frac{FC}{FA} = \frac{OI}{OA}$

$\frac{OI}{OA} = \frac{CI}{JA}$ (hệ quả định lí Talét) $\Rightarrow \frac{FC}{FA} = \frac{CI}{JA}$

* Tương tự ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{BO}{CI}$ (hệ quả định lí Talét)

$\frac{FC}{FA} = \frac{CI}{JA}$

Mặt khác $Ay \parallel FB$ ta có :

$\frac{EA}{EB} = \frac{JA}{BO} \Rightarrow \frac{DB}{DC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB} = \frac{BO}{CI} \cdot \frac{CI}{JA} \cdot \frac{JA}{BO} = 1 \text{ (đpcm)}.$

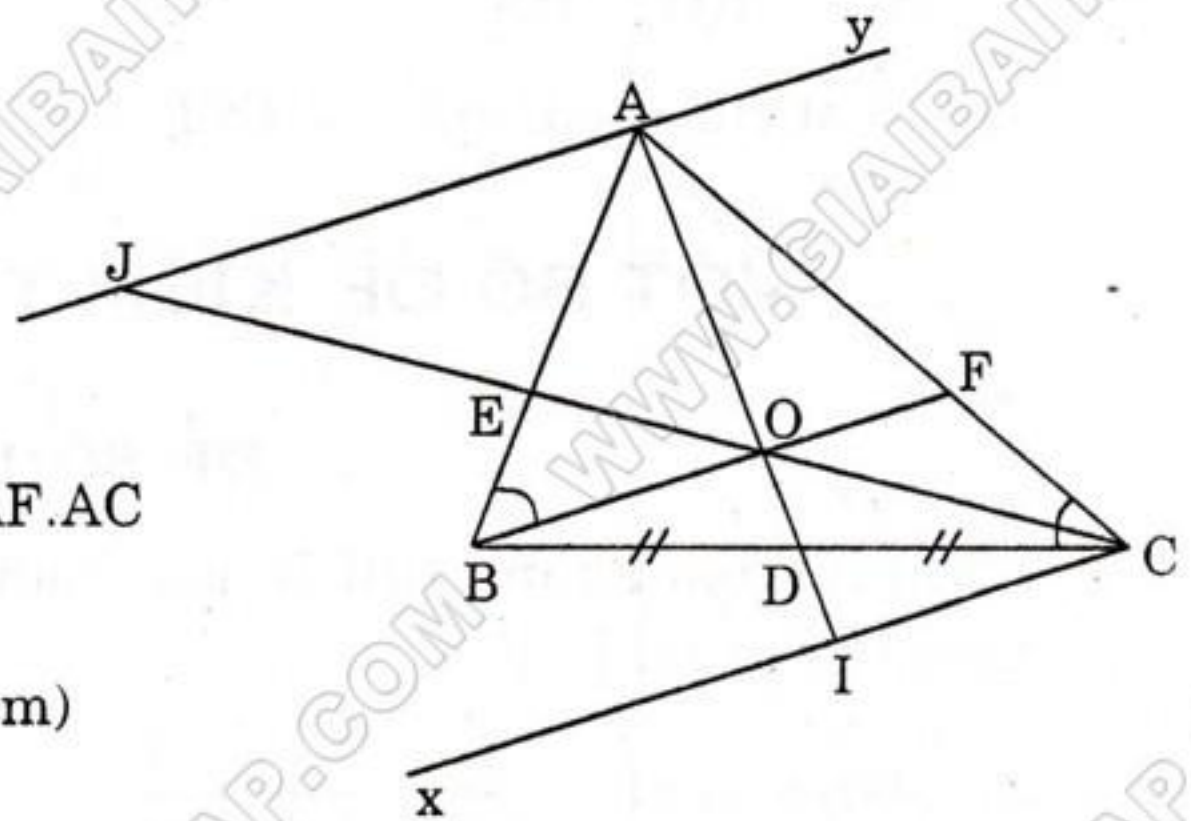
ĐỀ SỐ 2

1. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường phân giác AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm I sao cho $\widehat{ACI} = \widehat{BDA}$. Chứng minh rằng :

a) $\triangle ADB$ và $\triangle ACI$ đồng dạng, $\triangle ADB$ và $\triangle CDI$ đồng dạng.

b) $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$.

2. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$. Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 4\text{cm}$. Đường thẳng AM cắt đường chéo BD tại I cắt đường thẳng DC tại N.



a) Tính tỉ số $\frac{IB}{ID}$.

b) Chứng minh $\triangle MAB$ và $\triangle AND$ đồng dạng.

c) Tính độ dài DN và CN.

d) Chứng minh $IA^2 = IM \cdot IN$.

Giải

1. a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACI$ có :

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (gt)}$$

$$\widehat{ACI} = \widehat{BDA} \text{ (gt)}$$

Vậy $\triangle ADB \sim \triangle ACI$ (g.g)

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{AIC} \quad (1)$$

$\triangle ADB$ và $\triangle CDI$ có (1) và $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle CDI$ (g.g).

$$b) \triangle ADB \sim \triangle ACI \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AI \cdot AD \quad (2)$$

$$\text{và } \triangle ADB \sim \triangle CDI \Rightarrow \frac{DB}{DI} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow DB \cdot DC = AD \cdot DI \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB \cdot AC - DB \cdot DC = AD(AI - DI) = AD^2 \text{ (đpcm).}$$

$$2. a) AD \parallel BC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{BM}{AD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ (hệ quả định lí Talét).}$$

$$b) AB \parallel CD \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{AND} \text{ (so le trong)}$$

Lại có $\widehat{B} = \widehat{D}$ (góc đối của hình bình hành)

$\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle AND$ (g.g).

$$c) \triangle AMB \sim \triangle AND \text{ (cmt)}$$

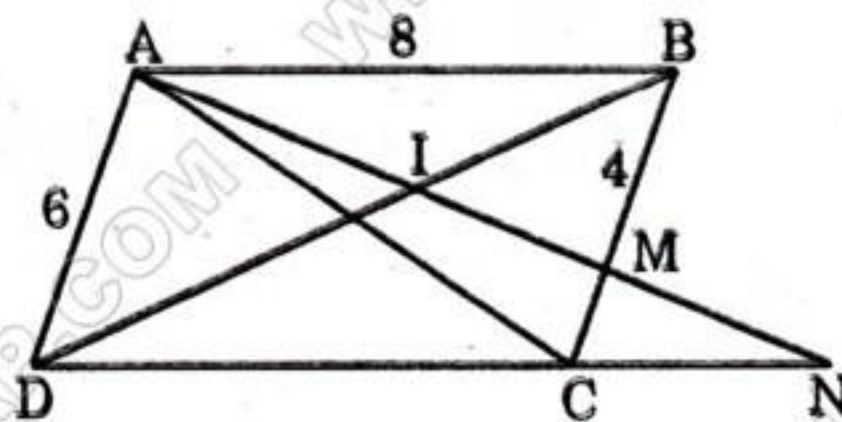
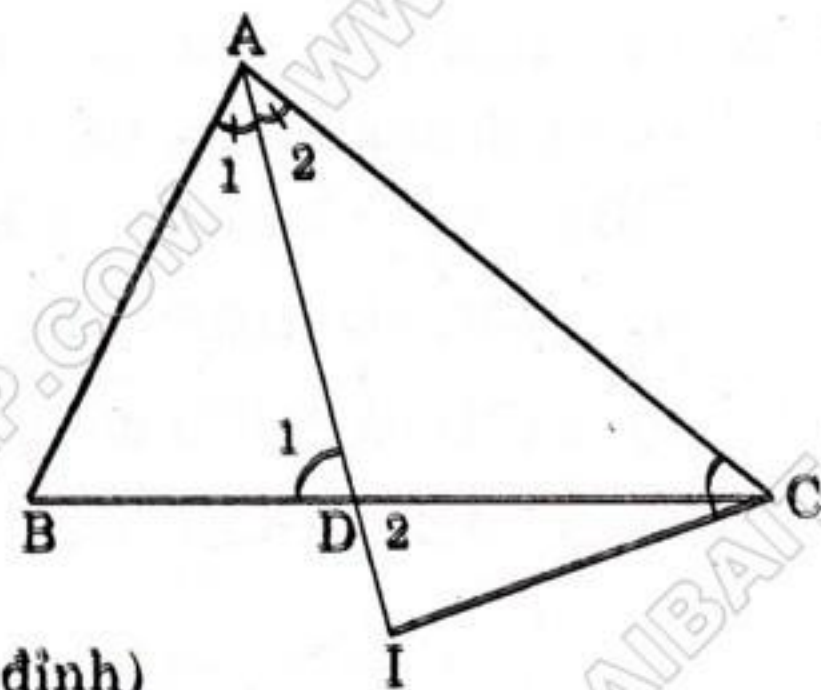
$$\Rightarrow \frac{DN}{AB} = \frac{AD}{MB}$$

$$\Rightarrow DN = \frac{AB \cdot AD}{MB} = \frac{8 \cdot 6}{4} = 12 \text{ (cm).}$$

$$\text{Do đó : } CN = DN - DC = 12 - 8 = 4 \text{ (cm).}$$

$$d) \text{Ta có : } \frac{IA}{IN} = \frac{IB}{ID} \text{ và } \frac{IB}{ID} = \frac{IM}{IA} \text{ (hệ quả định lí Talét)}$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IN} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow IA^2 = IM \cdot IN \text{ (đpcm).}$$



ĐỀ SỐ 3

1. Tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, phân giác của góc B cắt AC tại M, phân giác của góc C cắt AB tại N.

a) Tính AM, CM và MN.

b) Tính tỉ số diện tích của $\triangle AMN$ và $\triangle ABC$.

2. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, phân giác AD. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC không chứa A. Dựng tia Bx tạo với BC một góc $\widehat{CBx} = 60^\circ$ và cắt AD ở E. Chứng minh rằng :

a) $\triangle ADC$ và $\triangle BDE$ đồng dạng và $AE \cdot BD = AB \cdot BE$.

b) $\triangle ABD$ và $\triangle CED$ đồng dạng và $\triangle EBC$ đều.

c) $BC \cdot AE = AB \cdot EC + AC \cdot BE$.

d) $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Giải

1. a) BM là phân giác của góc B (gt)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{5} = \frac{MC}{6} = \frac{MA + MC}{5 + 6} = \frac{5}{11}$$

$$\Rightarrow MA = \frac{25}{11} \approx 2,3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó : } MC = AC - MA \approx 5 - 2,3 \approx 2,7 \text{ (cm)}$$

Tương tự CN là phân giác của C :

$$\frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB} \text{ mà } CA = AB \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NC}$$

$$\text{Do đó } \triangle AMN \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{MA}{AB}$$

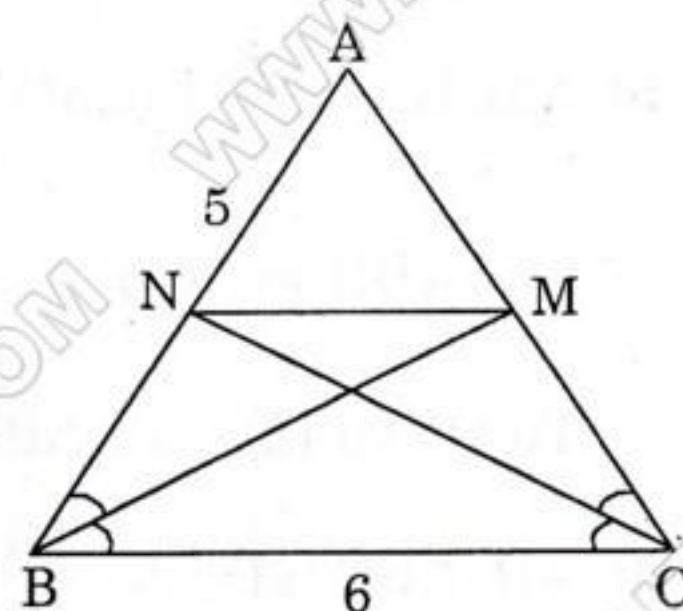
$$\Rightarrow MN = \frac{BC \cdot MA}{AB} \approx \frac{6 \cdot 2,3}{5} \approx 2,8 \text{ (cm)}$$

$$\text{b) } \triangle AMN \sim \triangle ABC \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AC} \right)^2 \approx \left(\frac{2,3}{5} \right)^2 \approx 0,2$$

2. a) Ta có : $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 60^\circ$ (gt).

$$\text{Lại có : } \widehat{DBE} = 60^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BDE \text{ (g.g.)}$$

Xét $\triangle EBD$ và $\triangle EAB$ có \widehat{BEA} chung; $\widehat{EBD} = \widehat{BAE} = 60^\circ$ (gt)



$$\Rightarrow \triangle EBD \sim \triangle EAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AE \cdot BD = AB \cdot BE.$$

$$\text{b) Ta có } \triangle ADC \sim \triangle BDE \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{DE}$$

Lại có $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle ADB \sim \triangle CED$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{BAD} = 60^\circ$

Vậy $\triangle EBC$ đều ($\widehat{EBC} = \widehat{BCE} = 60^\circ$).

c) Vì AD là phân giác của \widehat{BAC} (gt) ta có :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\text{Lại có } \frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AB} \text{ (1) (cmt)}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC \cdot BE = CD \cdot AE \quad (2)$$

Từ (1) ta có $AE \cdot BD = BE \cdot AB = EC \cdot AB$ (vì $EB = EC$)

$$\text{hay } EC \cdot AB = AE \cdot BD \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) $AB \cdot EC + AC \cdot BE = AE(CD + BD) = AE \cdot BC$ (đpcm).

$$\text{d) Ta có : } AE \cdot BC = AB \cdot EC + AC \cdot BE = AB \cdot BC + AC \cdot BC \text{ (vì } BC = EC) \\ = BC(AB + AC) \quad (*)$$

Mặt khác : Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có $\widehat{CAD} = \widehat{BAE} = 60^\circ$

$$\widehat{ACD} = \widehat{AEB} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AB \cdot AD} = \frac{AE}{AB \cdot AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{AE}{AB \cdot AC}$$

$$\text{Theo (*) ta có } \frac{1}{AD} = \frac{AB + AC}{AB \cdot AC} \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \text{ (đpcm).}$$

ĐỀ SỐ 4

1. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) tia phân giác của góc A cắt BC ở K. Qua trung điểm M của BC kẻ một tia song song với AK cắt đường thẳng AB ở D cắt AC ở F. Chứng minh $BD = CE$.

2. Cho $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ theo tỉ số $k = \frac{1}{2}$. Tính S_{MNP} biết $S_{ABC} = 6\text{cm}^2$.

3. Cho hình chữ nhật ABCD, kẻ AH vuông góc với đường chéo BD.

a) Chứng minh $\triangle AHD$ và $\triangle BDC$ đồng dạng và $BC^2 = DH \cdot DB$.

b) Gọi S là trung điểm của BH. R là trung điểm của AH.

Chứng minh $SH \cdot BD = SR \cdot DC$.

c) Gọi T là trung điểm của DC. Chứng minh tứ giác DRST là hình bình hành.

d) Tính góc AST.

Giải

1. Ta có : $MD \parallel AK \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BM}{KM}$ (định lý Talét)

$$\begin{aligned} \text{Tương tự : } \frac{CE}{AE} &= \frac{CM}{KM} \text{ mà } BM = CM \\ \Rightarrow \frac{BD}{AD} &= \frac{CE}{AE} \left(= \frac{BM}{KM} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác : $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$ (đồng vị); $\hat{E}_1 = \hat{A}_2$ (so le trong); $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (gt)

$$\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{E}_1$$

Do đó $\triangle ADE$ cân tại A $\Rightarrow AD = AE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD = CE$.

2. Ta có : $\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{6}{S_{MNP}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MNP} = 24\text{cm}^2$.

3. a) Hai tam giác vuông AHD và BDC có $\widehat{ADH} = \widehat{CBD}$ (SLT)

$$\Rightarrow \triangle AHD \sim \triangle DCB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DH}{BC} \text{ mà } AD = BC$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{DH}{BC} \Rightarrow BC^2 = DH \cdot DB.$$

b) Ta có S, R là trung điểm của HB và AH nên SR là đường trung bình của $\triangle ABH \Rightarrow SR \parallel AB$

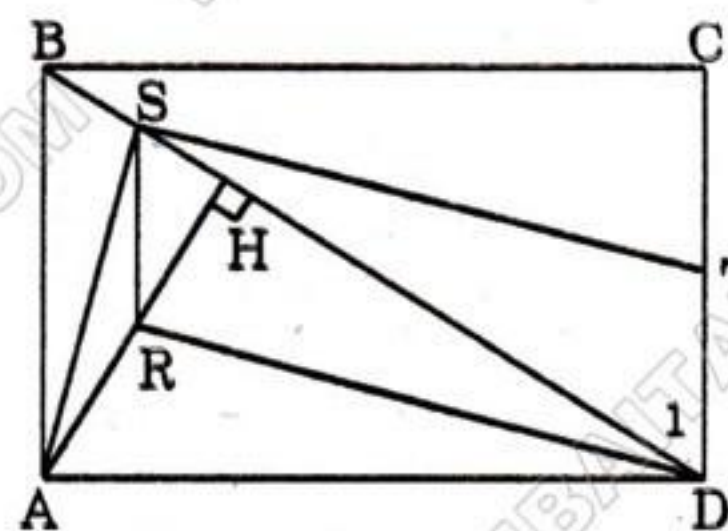
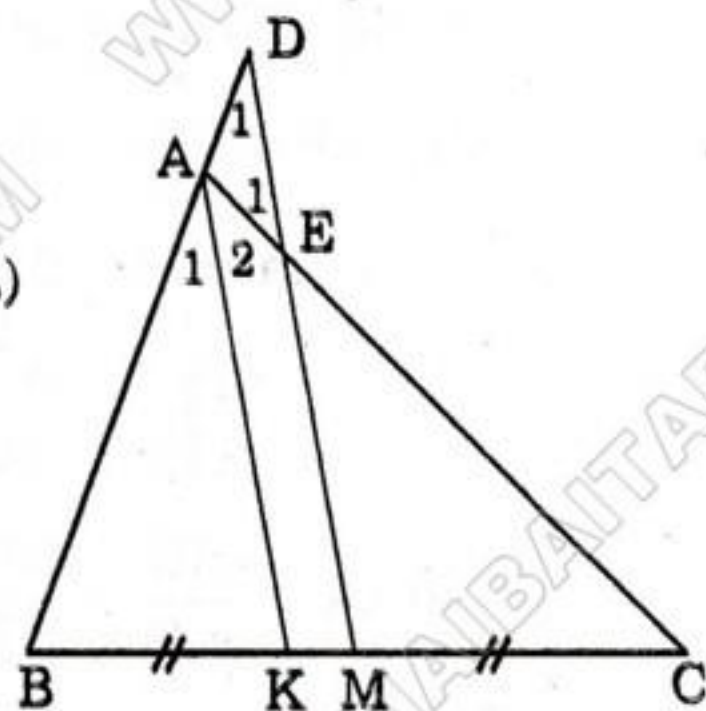
$$\Rightarrow \widehat{HSR} = \widehat{HBA} \text{ (đồng vị)}$$

$$\text{mà } \widehat{HBA} = \hat{D}_1 \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \widehat{HSR} = \hat{D}_1$$

$$\text{Do đó } \triangle SHR \sim \triangle DCB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SH}{SR} = \frac{DC}{DB}$$

$$\Rightarrow SH \cdot BD = SR \cdot DC \text{ (đpcm).}$$



c) Ta có $SR \parallel AB$ và $SR = \frac{1}{2} AB$ (cmt), $TD = \frac{1}{2} CD$

mà $AB = CD$ và $AB \parallel CD$ (gt) $\Rightarrow SR \parallel DT$ và $SR = DT$.

Do đó $DRST$ là hình bình hành.

d) Ta có $SR \parallel AB$ mà $AB \perp AD$ (gt) $\Rightarrow SR \perp AD$, lại có $AH \perp SD$ (gt)

$\Rightarrow R$ là trực tâm $\triangle SAD \Rightarrow DR$ là đường cao thứ ba nên $DR \perp SA$

mà $DR \parallel ST$ ($DRST$ là hình bình hành) $\Rightarrow ST \perp SA$.

Vậy $\widehat{AST} = 90^\circ$.

ĐỀ SỐ 5

1. Cho tam giác ABC , phân giác BD . Đường trung trực của BD cắt đường thẳng AC tại E .

a) Chứng minh $\triangle BED$ cân.

b) Chứng minh $\triangle EAB$ và $\triangle EBC$ đồng dạng.

c) Tính độ dài ED biết $AD = 4\text{cm}$, $DC = 5\text{cm}$.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 2\hat{C}$, đường cao AD .

a) Chứng tỏ $\triangle ADB$ và $\triangle ABC$ đồng dạng.

b) Kẻ tia phân giác của góc \widehat{ABC} cắt AD tại F và AC tại E .

Chứng tỏ $AB^2 = AE \cdot AC$.

c) Chứng tỏ $\frac{DF}{FA} = \frac{AE}{EC}$.

d) Biết $AB = 2BD$. Chứng tỏ diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác BFC .

Giải

1. a) $\triangle BED$ có đường cao EH đồng thời là đường trung tuyến nên cân tại E .

b) Ta có $\widehat{EBD} = \widehat{EDB}$ ($\triangle BED$ cân)

mà $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (gt)

và $\widehat{EBC} = \widehat{EBD} + \hat{B}_2$

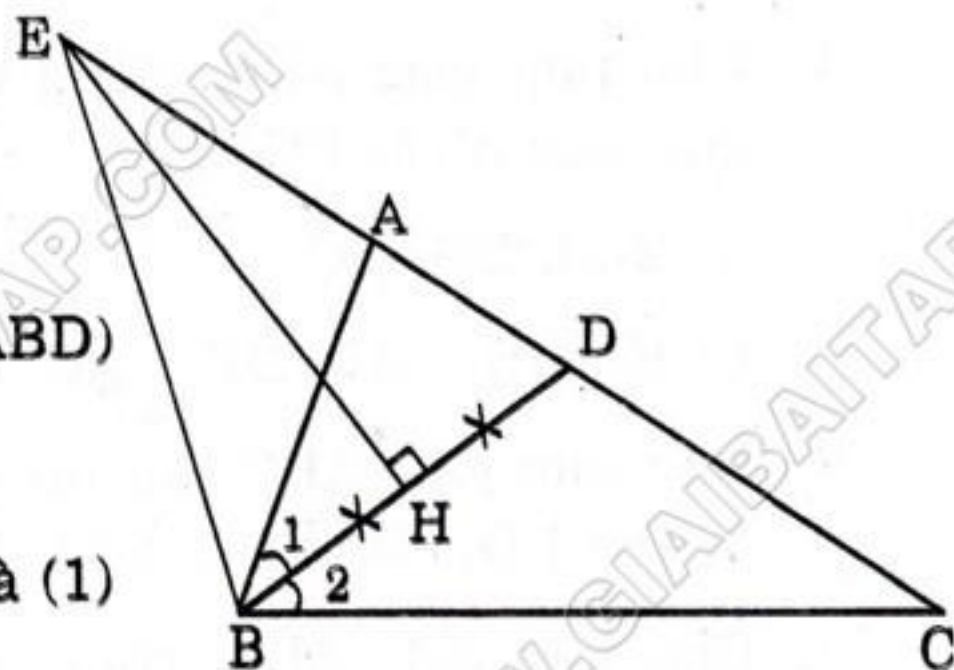
$\widehat{EAB} = \widehat{EDB} + \hat{B}_1$ (góc ngoài $\triangle ABD$)

Do đó $\widehat{EAB} = \widehat{EBC}$ (1)

Xét $\triangle EAB$ và $\triangle EBC$ có \hat{E} chung và (1)

$\Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle EBC$ (g.g).

c) Ta có $\triangle EAB \sim \triangle EBC$ (cmt)



$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{BC} \text{ mà } \frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC} = \frac{4}{5} \text{ (tính chất đường phân giác)}$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5EB = 4EC \Rightarrow 5EB = 4(EB + DC) \text{ vì } EB = ED$$

$$\Rightarrow 5EB = 4(EB + 5) \Rightarrow EB = 20 \text{ (cm).}$$

2. a) $\triangle ADB$ và $\triangle ABC$ vuông có \hat{B} chung $\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle CAB$ (g.g).

b) Vì $\hat{B} = 2\hat{C}$ (gt) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}$

Do đó hai tam giác vuông ABE và ACB đồng dạng

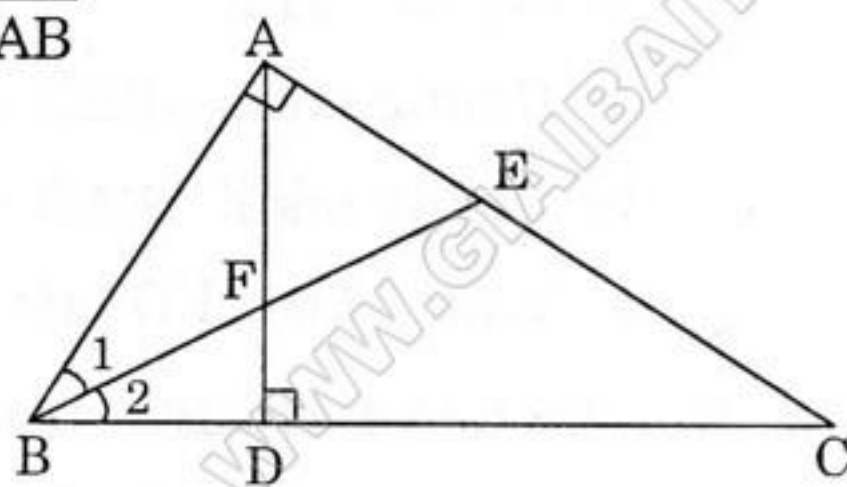
$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE.AC.$$

c) Ta có $\triangle ADB \sim \triangle CAB$ (cmt) $\Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BD}{AB}$

Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC} \text{ và } \frac{BD}{BA} = \frac{FD}{FA}$$

$$\Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{EA}{EC}$$



d) Ta có $AB = 2BD$ (gt) $\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$ mà $\frac{BD}{AB} = \frac{FD}{FA}$

$$\Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{BD}{BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow FA = 2FD \text{ hay } AD = 3FD$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{mà } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD \\ S_{BFC} = \frac{1}{2} BC \cdot FD \end{array} \right\} \Rightarrow S_{ABC} = 3S_{BFC}.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Đường phân giác góc A cắt BC tại D.

a) Tính DB, DC.

b) Kẻ $DE \perp AB$, $DF \perp AC$. Tính chu vi và diện tích tứ giác AEDF.

2. Cho tam giác ABC cân tại A, phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Tính độ dài BD, biết $BC = 5$ và $AC = 20$.

3. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB và AC thứ tự tại E và F.

- a) Chứng minh rằng, khi D di động trên cạnh BC thì $DE + DF$ có giá trị không đổi.
- b) Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt EF ở K. Chứng minh rằng K là trung điểm của EF.
4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Gọi M là trung điểm của BC biết $BH = 7,2\text{cm}$; $CH = 12,8\text{cm}$. Đường vuông góc với BC tại M cắt AC ở D.
- a) Tính diện tích $\triangle DMC$.
- b) Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AC. Tính diện tích $\triangle KDM$.
5. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm I. DI cắt đường thẳng BC tại K.
- a) Chứng tỏ $\triangle ADI$ và $\triangle CKD$ đồng dạng, suy ra $AD^2 = AI \cdot CK$.
- b) Dựng Dx vuông góc với DK cắt đường thẳng BC tại J. Chứng tỏ $\triangle DIJ$ cân.
- c) Chứng tỏ : $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}$.

Hướng dẫn

1. a) Tính $BC = 10$, $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB + DC}{3 + 4} = \frac{BC}{7} = \frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow DC \approx 5,71; DB \approx 4,28.$$

- b) AEDF là hình chữ nhật có đường chéo là phân giác là hình vuông.

Tính cạnh hình vuông $\frac{FD}{AB} = \frac{CF}{AC}$.

Đáp số : Chu vi 14cm , diện tích $12,25\text{cm}^2$.

2. BD là phân giác của $\triangle ABC$:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow \frac{DA}{4} = \frac{DC}{1} = \frac{DA + DC}{5} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow DC = 4\text{cm}.$$

Ta có : $\widehat{DIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB}$ (góc ngoài của $\triangle IBC$) $\Rightarrow \widehat{DIC} = \widehat{ABC}$

$$\Rightarrow \triangle CID \sim \triangle BCD \text{ (g.c.g)} \Rightarrow \frac{ID}{CD} = \frac{IC}{BC} = \frac{CD}{BD} \text{ hay } \frac{ID}{4} = \frac{IC}{5} = \frac{4}{BD}$$

Mặt khác do CI là phân giác của \widehat{C} :

$$\frac{ID}{IB} = \frac{CD}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{ID}{4} = \frac{IB}{5} = \frac{ID + IB}{9} = \frac{BD}{9} \text{ (IB = IC)}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{BD}{9} \Rightarrow BD^2 = 36 \Rightarrow BD = 6 \text{ (cm)}.$$

3. a) Ta có : $DE + DF = 2AM$ không đổi.

b) Ta chứng minh : $\frac{FK}{AM} = \frac{KE}{AM} \Rightarrow FK = KE.$

4. a) Xét $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.c.g) $\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{HB}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB.HC$

Ta được $AH = 9,6\text{cm}.$

Theo định lí Talét : $\frac{MD}{AH} = \frac{MC}{HC} \Rightarrow MD = 7,5\text{cm}$

$$S_{DMC} = 37,5\text{cm}^2.$$

b) $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH$ mà $BC = BH + HC.$

Đáp số : $S_{ABC} = 96\text{cm}^2.$

$\triangle KDM \sim \triangle ABC$ (g.c.g) và tỉ số $k = \frac{MD}{BC} = \frac{7,5}{20} = \frac{3}{8}$

Do đó : $\frac{S_{KDM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow S_{KMD} = 96 \cdot \frac{9}{64} = 13,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$

5. a) $\triangle ADI \sim \triangle CKD$ (g.c.g) $\Rightarrow \frac{AD}{CK} = \frac{AI}{CD}$ hay $\frac{AD}{CK} = \frac{AI}{AD}$
 $\Rightarrow AD^2 = AI.CK.$

b) $\widehat{ADI} = \widehat{CDJ}$ (cùng phụ với \widehat{IDC}) $\Rightarrow \triangle DIA = \triangle DJC$ (g.c.g)
 $\Rightarrow DI = DJ.$

c) $\triangle JDK \sim \triangle JCD$ (g.c.g) $\Rightarrow \frac{JK}{DK} = \frac{DJ}{DC}$

$$\Rightarrow JK.DC = DJ.DK \Rightarrow JK^2.DC^2 = DJ^2.DK^2$$

$$\Rightarrow DC^2 = \frac{DJ^2.DK^2}{JK^2} \Rightarrow \frac{1}{DC^2} = \frac{JK^2}{DJ^2.DK^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{DC^2} = \frac{DJ^2 + DK^2}{DJ^2.DK^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DK^2} + \frac{1}{DJ^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DK^2} + \frac{1}{DI^2}.$$

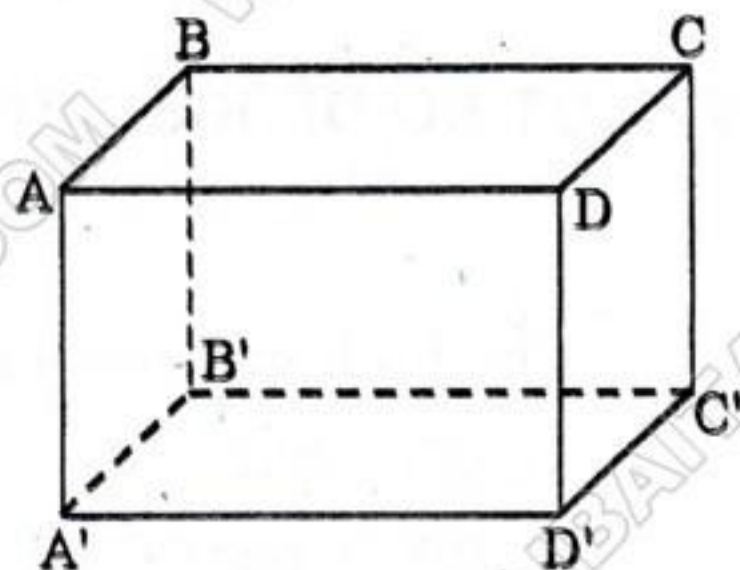
Chương IV. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU

§1, 2, 3. Hình hộp chữ nhật. Thể tích hình hộp chữ nhật

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình hộp chữ nhật

- * Hình hộp chữ nhật là hình có 6 mặt đều là những hình chữ nhật.
- * Là hình có 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.
- * Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là 2 mặt đối diện. Có thể xem là hai mặt đáy của hình. Các mặt còn lại được gọi là các mặt bên.
- * Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là những hình vuông.



2. Mặt phẳng và đường thẳng

Đường thẳng đi qua 2 điểm của mặt phẳng (ABCD) thì nằm trọn trong mặt phẳng đó.

3. Hai đường thẳng song song trong không gian

- * Trong không gian hai đường thẳng a và b gọi là song song với nhau nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.
- * Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

4. Đường thẳng song song với mặt phẳng - Hai mặt phẳng song song

- * Khi AB không nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ mà AB song song với một đường thẳng của mặt phẳng này chẳng hạn $AB \parallel A'B'$ thì ta nói AB song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Kí hiệu $AB \parallel mp (A'B'C'D')$.
- * Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau AB và AD và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau $A'B'$ và $A'D'$ mà $AB \parallel A'B'$, $CD \parallel C'D'$. Khi đó người ta nói rằng $mp (ABCD)$ song song với $mp (A'B'C'D')$. Kí hiệu : $mp (ABCD) \parallel mp (A'B'C'D')$.

5. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc

- * Khi đường thẳng AA' vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AD và AB của mặt phẳng $(ABCD)$ ta nói AA' vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Kí hiệu : $AA' \perp mp (ABCD)$.
- * Nếu một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đi qua A .

- * Khi một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

6. Thể tích

Thể tích của hình hộp chữ nhật :

$$V = a.b.c \quad (a, b, c \text{ là các kích thước}).$$

Thể tích của hình lập phương :

$$V = a^3 \quad (a : \text{cạnh của hình lập phương}).$$

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng :

- $BD \parallel B'D'$.
- $BB' \parallel \text{mp} (CC'D'D)$, $B'D' \parallel \text{mp} (ABCD)$.
- $\text{mp} (ABB'A') \parallel \text{mp} (DCC'D')$.

Giải

- Ta có $ABB'A'$ là hình chữ nhật nên

$$AA' \parallel BB' \quad \text{và} \quad AA' = BB'.$$

Tương tự $ADD'A'$ là hình chữ nhật :

$$AA' \parallel DD' \quad \text{và} \quad AA' = DD'$$

$$\Rightarrow BB' \parallel DD' \quad \text{và} \quad BB' = DD'$$

Do đó $BB'D'D$ là hình bình hành $\Rightarrow BD \parallel B'D'$.

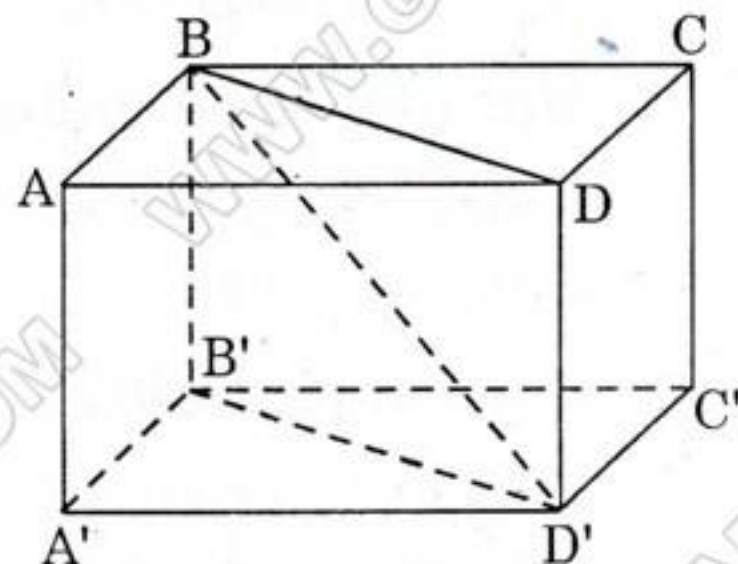
- $BB'C'C$ là hình chữ nhật : $BB' \parallel CC'$ mà BB' không thuộc $\text{mp} (CC'D'D)$ và CC' thuộc $\text{mp} (CC'D'D)$ nên $BB' \parallel \text{mp} (CC'D'D)$.

$BB'D'D$ là hình bình hành (cmt) $\Rightarrow B'D' \parallel BD$ mà $B'D'$ không thuộc $\text{mp} (ABCD)$ và BD thuộc $\text{mp} (ABCD)$ nên $B'D' \parallel \text{mp} (ABCD)$.

- Ta có : $AB \parallel CD$ ($ABCD$ là hình chữ nhật)

$$AA' \parallel DD' \quad (\text{ADD'A' là hình chữ nhật})$$

mà $\text{mp} (ABB'A')$ chứa hai đường cắt nhau AB và AA' và $\text{mp} (DCC'D')$ chứa hai đường cắt nhau CD và DD' $\Rightarrow \text{mp} (ABB'A') \parallel \text{mp} (DCC'D')$.



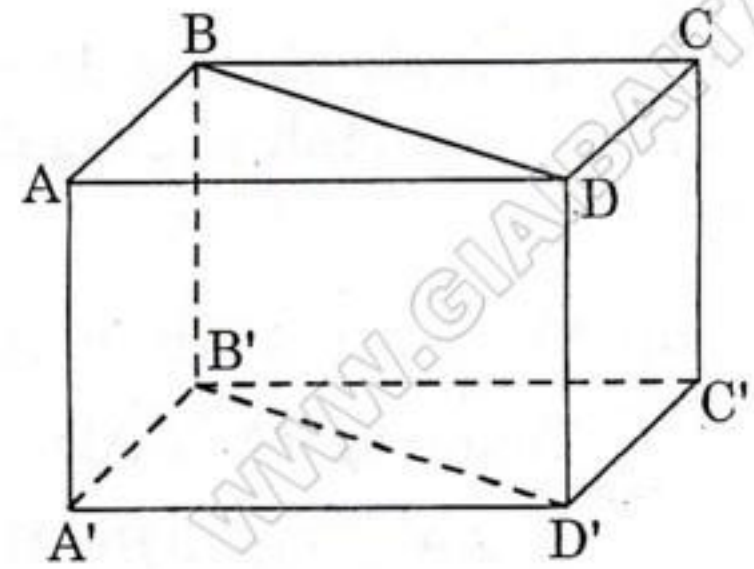
ĐỀ SỐ 2

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng :

- $BDD'B'$ là hình chữ nhật.
- $BB' \perp \text{mp} (ABCD)$.
- $\text{mp} (ABB'A') \perp \text{mp} (ABCD)$.

Giải

- a) $BB' \perp A'B'$ ($ABB'A'$ là hình chữ nhật)
 $BB' \perp B'C'$ ($BCC'B'$ là hình chữ nhật)
 $\Rightarrow BB' \perp mp(A'B'C'D')$
 $\Rightarrow BB' \perp B'D'$ hay $\widehat{BB'D'} = 1v$
 Hình bình hành $BDD'B'$ có một góc vuông
 nên là hình chữ nhật.
- b) Ta có $BB' \perp AB$ ($ABB'A'$ là hình chữ nhật),
 tương tự $BB' \perp BC$.
 BB' vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AB và BC
 $\Rightarrow BB' \perp mp(ABCD)$.
- c) $mp(ABB'A')$ chứa BB' mà $BB' \perp mp(ABCD)$
 $\Rightarrow mp(ABB'A') \perp mp(ABCD)$.



ĐỀ SỐ 3

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Chứng minh $BB' \perp mp(ABCD)$.
- b) Cho $AB = 12\text{cm}$, $AD = 16\text{cm}$ và $B'D = 25\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình.

Giải

- a) Ta có $BB' \perp AB$ ($ABB'A'$ là hình chữ nhật)
 lại có $BB' \perp BC$ ($BCC'B'$ là hình chữ nhật)
 $\Rightarrow BB' \perp mp(ABCD)$.
- b) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\triangle ABD$ vuông tại A , ta có :

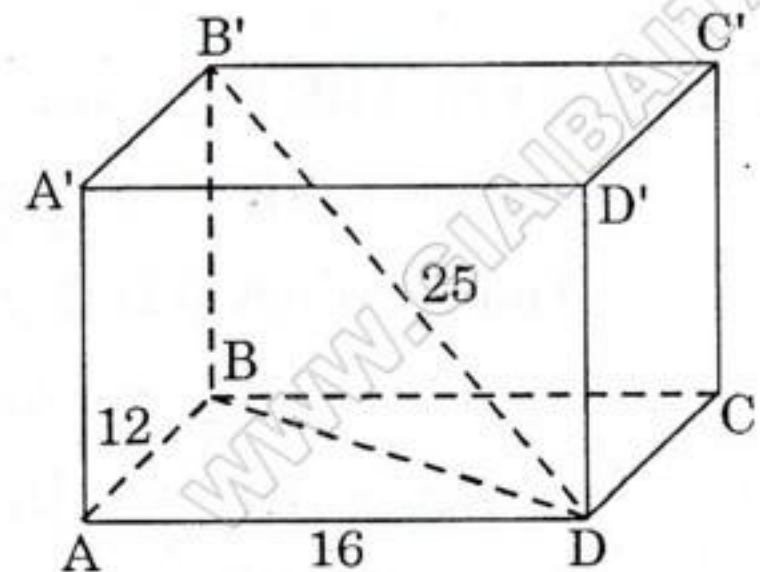
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} \quad (\text{định lí Py-ta-go})$$

$$= \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ (cm)}.$$

Lại có $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp BD$ hay $\triangle B'BD$ vuông tại B ta có :

$$BB' = \sqrt{B'D^2 - BD^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = 2(12 + 16).15 = 840 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 4

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi các cạnh đáy là a , b và chiều cao của hình là c . Chứng minh rằng :

a) $AA' \perp mp(ABCD)$.

b) Bình phương độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật bằng tổng các bình phương độ dài các cạnh.

Giải

a) Ta có $AA' \perp AB$ (vì $ABB'A'$ là hình chữ nhật).

Tương tự $AA' \perp AD$

$\Rightarrow AA' \perp mp(ABCD)$

b) Xét tam giác vuông ADC có :

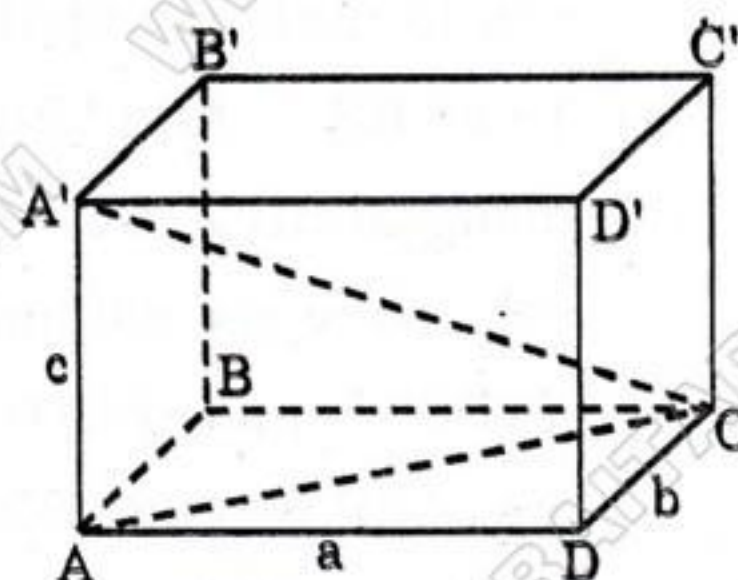
$$AC^2 = a^2 + b^2 \text{ (định lí Py-ta-go).}$$

Mặt khác $AA' \perp mp(ABCD)$ (cmt)

$\Rightarrow AA' \perp AC$

Xét tam giác vuông $A'AC$ ta có :

$$A'C^2 = AA'^2 + AC^2 = c^2 + a^2 + b^2.$$



ĐỀ SỐ 5

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $BDD'B'$ là hình chữ nhật.

b) Cho $AD = 4\text{cm}$; $AA' = 6\text{cm}$; $BD = 5\text{cm}$.

Tính đường chéo của hình hộp trên.

Giải

a) Ta có $ABB'A'$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AA' \parallel BB'$ và $AA' = BB'$.

Tương tự $AA'D'D$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AA' \parallel DD'$ và $AA' = DD'$

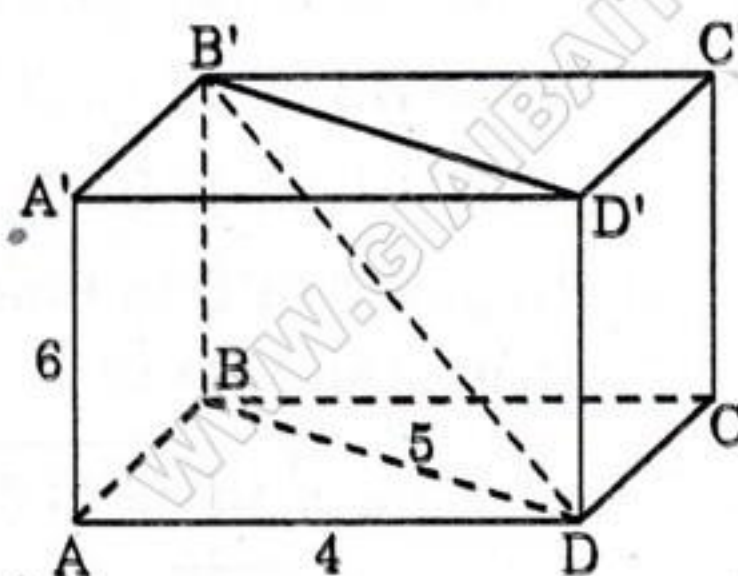
$\Rightarrow BB' \parallel DD'$ và $BB' = DD'$

Do đó $BDD'B'$ là hình bình hành (1)

Mặt khác $BB' \perp AB$ (vì $ABB'A'$ là hình chữ nhật).

Tương tự : $BB' \perp BC \Rightarrow BB' \perp mp(ABCD) \Rightarrow BB' \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BDD'B'$ là hình chữ nhật.



b) Ta có $\triangle ABD$ vuông tại A : $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2}$ (định lí Py-ta-go)

$$= \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (cm).}$$

Theo câu b) đề số 4 ta có : $B'D^2 = 6^2 + 4^2 + 3^2 = 61$

$$\Rightarrow B'D = \sqrt{61} \text{ (cm).}$$

ĐỀ SỐ 6

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích là 216cm^3 .

a) Tính diện tích toàn phần của hình lập phương.

b) Tính đường chéo của hình lập phương.

Giải

a) Gọi cạnh của hình lập phương là a , ta có :

$$V = a^3 \quad \text{hay} \quad 216 = a^3 \Rightarrow a = 6 \text{ (cm)}$$

$$S_{xq} = 2(a + a).a = 4a^2,$$

$$2S_d = 2a^2$$

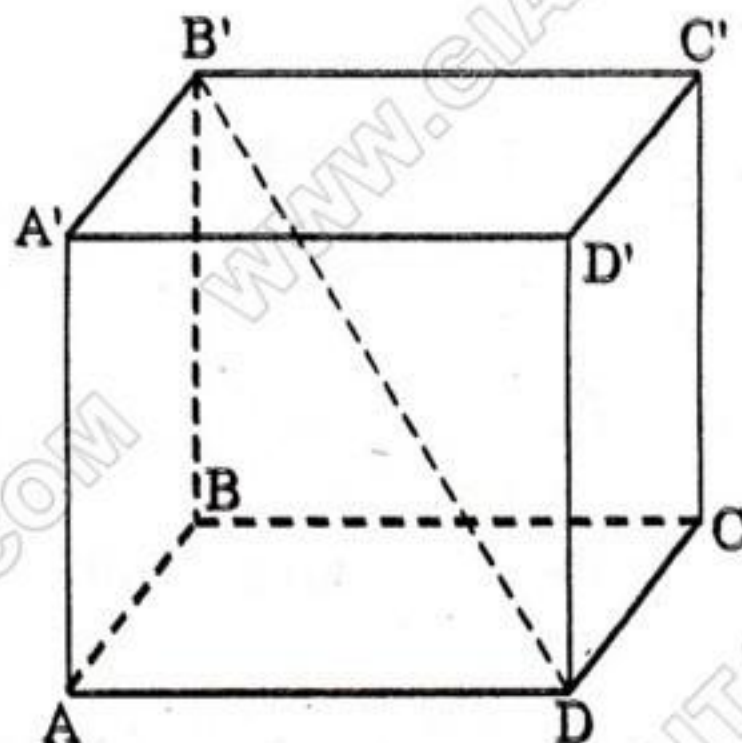
$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2 \text{ (với } a = 6)$$

$$\text{Ta có: } S_{tp} = 6.6^2 = 216 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên các cạnh đáy, đường cao của hình bằng $a = 6\text{cm}$.

$$\Rightarrow B'D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow B'D = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Vậy đường chéo của hình lập phương cạnh là 6 (cm) , $B'D = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$.



ĐỀ SỐ 7

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AA' = BB' = a$ và $\widehat{ACA'} = 30^\circ$. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình.

Giải

Ta có $AA'D'D$ và $ABB'A'$ là các hình chữ nhật

$$\Rightarrow AA' \perp AD \text{ và } AB$$

$$\Rightarrow AA' \perp mp(ABCD)$$

$$\Rightarrow AA' \perp AC \text{ hay } \triangle A'AC \text{ vuông tại } A.$$

$$\text{Có } \widehat{ACA'} = 30^\circ \text{ và } AA' = a$$

$$\Rightarrow A'C = 2AA' = 2a.$$

Theo định lý Py-ta-go :

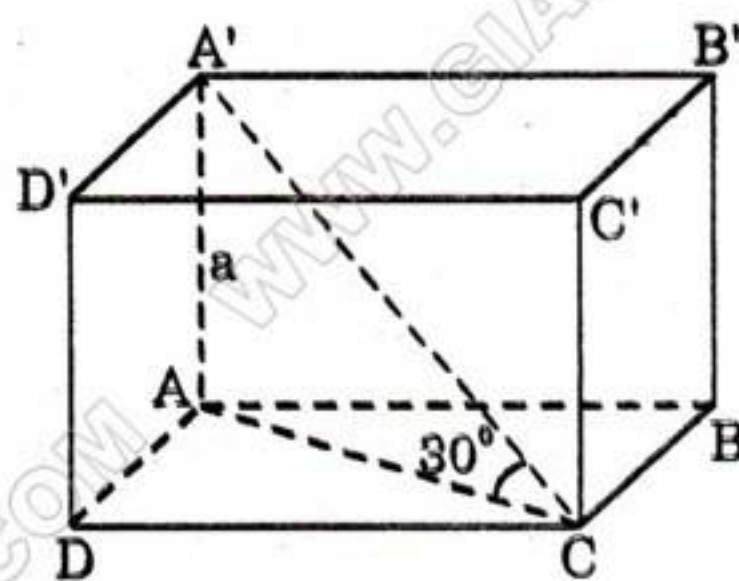
$$AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

Mặt khác $\triangle ABC$ vuông tại B ta có :

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

$$S_{xq} = 2(a + a\sqrt{2}).a = 2a^2 + 2a^2\sqrt{2} = 2a^2(1 + \sqrt{2}) \text{ (đvdt)}$$

$$S_d = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} \text{ (đvdt)}$$



$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2a^2.(1 + \sqrt{2}) + 2a^2\sqrt{2} = 2a^2(1 + 2\sqrt{2}) \text{ (đvdt)}$$

$$V = a^3\sqrt{2} \text{ (đvtt)}.$$

ĐỀ SỐ 8

Tính các kích thước của một hình hộp chữ nhật nhận biết rằng thể tích của hình hộp là 560cm^3 và các kích thước của hình hộp tỉ lệ với 5, 2, 7.

Giải

Gọi các kích thước của hình hộp là a, b, c (đơn vị : cm).

Ta có : $a.b.c = 560$ (a, b, c tỉ lệ với 5, 2, 7) và $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{7}$

Đặt $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{7} = t$ ($t > 0$) $\Rightarrow a = 5t; b = 2t; c = 7t$

$$\Rightarrow (5t).(2t).(7t) = 560 \Rightarrow 70t^3 = 560 \Rightarrow t^3 = 8 \Rightarrow t = 2$$

Từ đó : $a = 5.2 = 10$ (cm); $b = 2.2 = 4$ (cm); $c = 7.2 = 14$ (cm).

ĐỀ SỐ 9

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có diện tích toàn phần là 294cm^2 . Tính thể tích của hình lập phương đó.

Giải

Gọi x (cm) là cạnh của hình lập phương $x > 0$.

Ta có diện tích hai đáy là $2x^2$. Diện tích xung quanh $4x^2$.

$$\text{Vậy : } S_{tp} = 2x^2 + 4x^2 = 6x^2$$

$$\text{Ta có : } 6x^2 = 294 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7 \text{ (cm) (x > 0)}$$

$$\text{Do đó : } V = 7^3 = 343 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ĐỀ SỐ 10

Một bể nước hình lập phương cạnh 1m có chứa nước với độ sâu của nước là 6dm. Người ta thả 100 viên gạch có chiều dài 2dm. Rộng 1,2dm; cao 0,5dm vào bể. Hỏi nước trong bể dâng lên cách miệng bể bao nhiêu đềximét ? (giả thiết gạch ngập toàn bộ trong nước và gạch không thấm nước).

Giải

Thể tích của một viên gạch là : $2.1.0,5 = 1,2$ (dm³).

Do đó thể tích của 100 viên gạch là : $1,2.100 = 120$ (dm³).

Ta có 1m = 10dm

Chiều cao dâng lên khi bỏ gạch vào là :

$$120 : (10.10) = 1,2 \text{ (dm)}$$

Do đó mực nước trong bể cách miệng bể là :

$$10 - (1,2 + 6) = 2,6 \text{ (dm)}.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. M là trung điểm của AA' . Chứng minh $AO \perp B'D'$ và $OM \perp B'D'$.
2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy chứng minh hai mặt phẳng (BDC') và $(AB'D')$ song song.
3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $AA' = 6\text{cm}$.
 - a) Tính thể tích hình hộp chữ nhật.
 - b) Tính độ dài đường chéo AC' của hình hộp chữ nhật.

Hướng dẫn

1. Trước hết chứng minh $BDD'B'$ là hình bình hành nên $B'D' \parallel BD$.
Vậy góc giữa $A'O$ và $B'D'$ là góc giữa BD và $A'O$. Chứng minh BD vuông với $A'O$ dựa vào $\triangle A'BD$ là tam giác đều có trung tuyến $A'O$ vừa là đường cao.
2. $BB' \parallel DD'$ và $BB' = DD' \Rightarrow$ Tứ giác $BDD'B'$ là hình bình hành
 $\Rightarrow BD \parallel B'D' \Rightarrow BD \parallel \text{mp} (AB'D')$
Chứng minh tương tự : $BC' \parallel AD' \Rightarrow BC' \parallel \text{mp} (AB'D')$
Vậy $\text{mp} (BDC') \parallel \text{mp} (AB'D')$.

3. $V = 4.5.6 = 120 \text{ (cm}^3\text{)}$

Ta có : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 5^2 = 41$

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{41 + 36} = \sqrt{77} \text{ (cm)}.$$

§4, 5, 6. Hình lăng trụ đứng

Diện tích xung quanh - Thể tích

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

* Hình $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình lăng trụ đứng.

- Các đỉnh : $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$.
- Các mặt bên $ABB_1A_1, BCC_1B_1, \dots$ là các hình chữ nhật và chúng vuông góc với hai mặt phẳng đáy.

- Các cạnh bên : AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 song song với nhau và bằng nhau cùng vuông góc với hai mặt phẳng đáy.
- Hai đáy : $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$.
- Chiều cao là chiều dài của cạnh bên.

* Diện tích xung quanh :

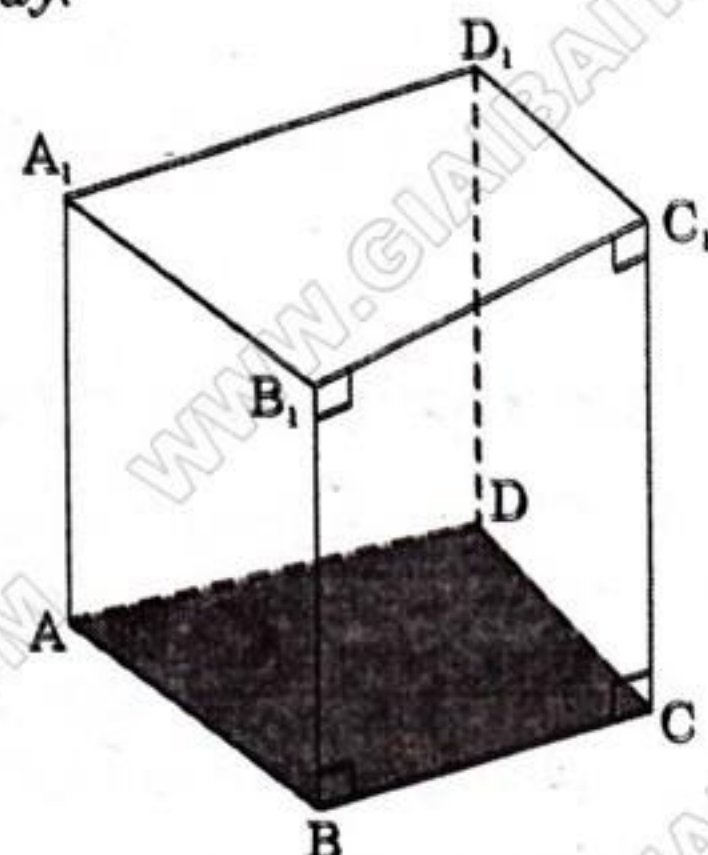
$$S_{xq} = 2p.h$$

(p : nửa chu vi đáy, h : chiều cao).

* $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$

* Thể tích : $V = S.h$

(S : diện tích đáy, h : chiều cao).



B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$ và $BC = 5\text{cm}$.

a) Chứng tỏ $\triangle ABC'$ vuông tại A.

b) Biết chiều cao của hình lăng trụ là 7cm . Tính diện tích toàn phần và thể tích.

Giải

a) $\triangle ABC$ có : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ($3^2 + 4^2 = 5^2$)

Theo định lí Py-ta-go đảo ta có $\triangle ABC$ vuông tại A,

hay $AB \perp AC$ (1)

Lại có $AA' \perp mp(ABC)$

$\Rightarrow AA' \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $AB \perp mp(ACC'A')$,

mà $AC' \in mp(ACC'A')$

$\Rightarrow AB \perp AC'$ hay $\triangle ABC'$ vuông tại A.

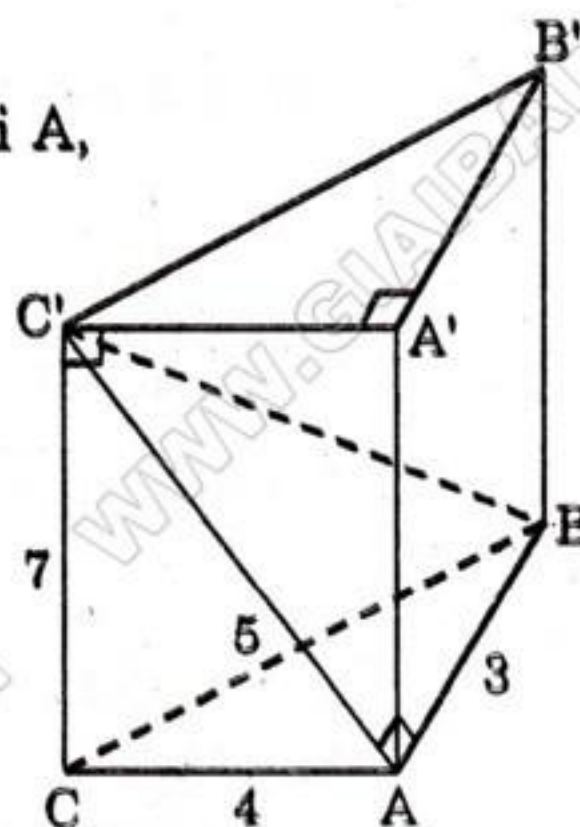
b) $p = 3 + 4 + 5 = 12 \Rightarrow \frac{p}{2} = 6 \text{ (cm)}$

$$S_{xq} = 2p.h = 2.6.7 = 84 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ (cm}^2\text{)} \Rightarrow 2S_{ABC} = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 84 + 12 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V = S_d.h = 6.7 = 42 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 2

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình chữ nhật có các kích thước là 6cm, 4cm. Chiều cao của hình lăng trụ là 8cm. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình.

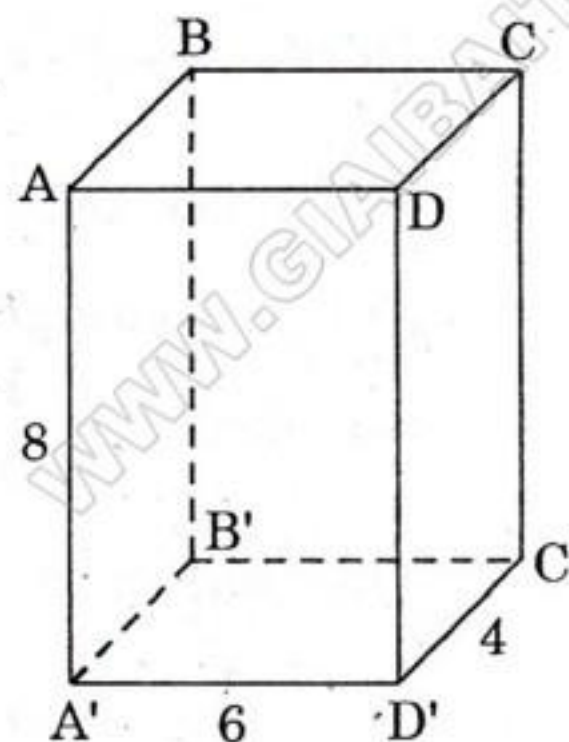
Giải

$$\text{Ta có : } S_{xq} = 2p.h = 2(6 + 4).8 = 160 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_d = 4.6 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 160 + 2.24 = 208 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V = S.h = 6.4.8 = 192 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 3

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác đều cạnh a . Biết rằng đường chéo AB' tạo với cạnh $A'B'$ một góc $\widehat{AB'A} = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ đó.

Giải

Ta có $\triangle AA'B'$ vuông tại A' có $\widehat{AB'A} = 60^\circ$ và $A'B' = a \Rightarrow AB' = 2a$

$$AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3} \text{ (định lí Py-ta-go)}$$

$$S_{xq} = 2p.h = 3a.a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}a^2 \text{ (đvdt)}.$$

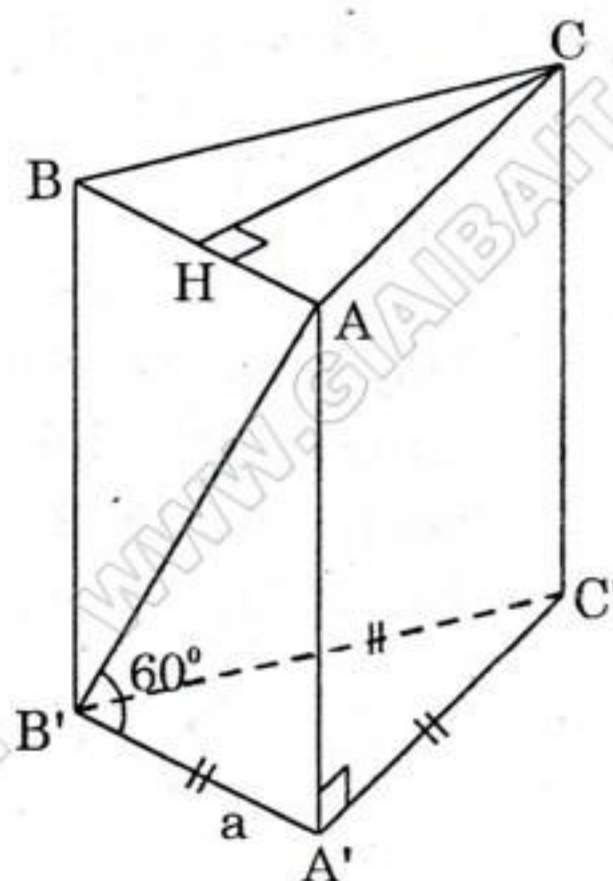
Mặt khác $\triangle ABC$ đều nên đường cao CH đồng thời là trung tuyến

$$\Rightarrow HB = HA = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{CA^2 - HA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó : } S_d = \frac{1}{2}.AB.CH = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V = S_d.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}.$$



ĐỀ SỐ 4

Cho hình lăng trụ đứng đáy là tam giác vuông cân tại A . Biết chiều cao của hình là 7cm và thể tích là 126cm^3 . Tính diện tích toàn phần của hình.

Giải

$$\text{Ta có : } V = S_d \cdot h \Rightarrow S_d = \frac{V}{h} = \frac{126}{7} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Mặt khác $\triangle ABC$ vuông cân tại A (gt).

Gọi hai cạnh góc vuông là x ta có diện tích

$$\text{mặt đáy } S_d = \frac{1}{2} x^2.$$

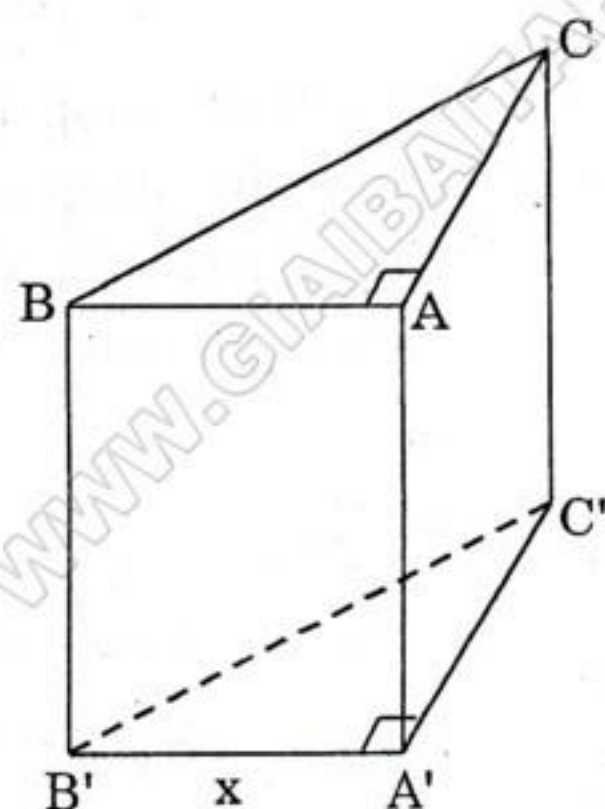
Theo bài ra ta có :

$$\frac{1}{2} x^2 = 18 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$S_{xq} = 2p \cdot h = 2 \cdot \frac{(6 + 6 + 6\sqrt{2})}{2} \cdot 7 = 42(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 42(2 + \sqrt{2}) + 2 \cdot 18 = 2(60 + 21\sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$



ĐỀ SỐ 5

Cho hình bên, bể nước hình lăng trụ đứng có :

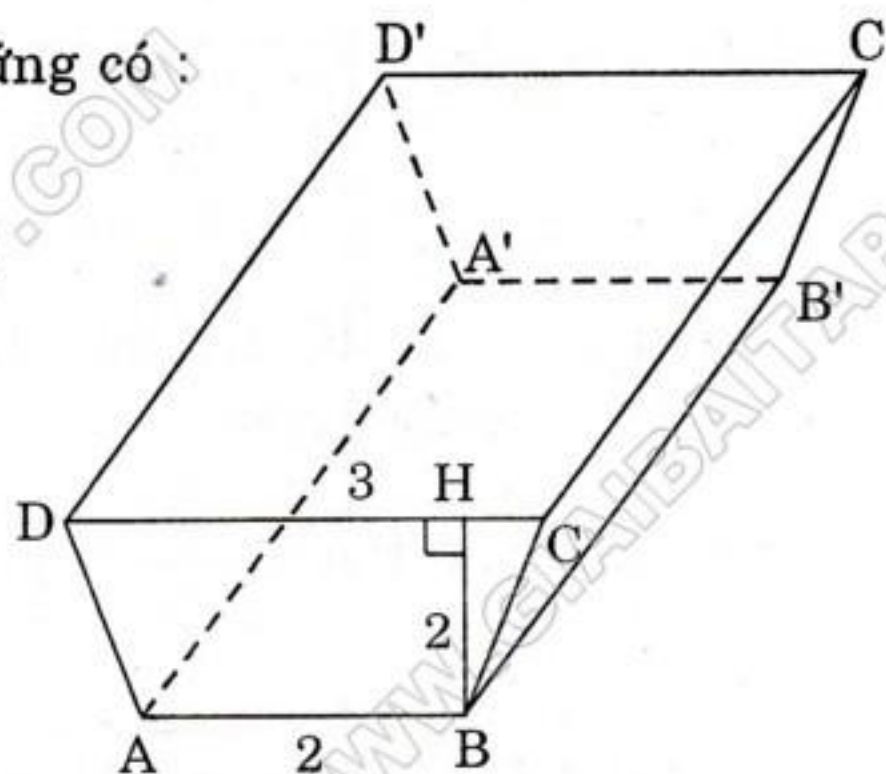
$$V_{ABC.A'B'C'} = 60 \text{ m}^3$$

$$AB = 2 \text{ m, DC} = 3 \text{ m, BH} = 2 \text{ m}$$

Tính AA'.

Giải

Đáy của bể nước hình lăng trụ đứng là một hình thang cân có hai cạnh đáy là 2m và 3m chiều cao BH = 2m.



$$\text{Ta có : } S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot BH}{2} = \frac{(2 + 3) \cdot 2}{2} = 5 \text{ (m}^2\text{)}$$

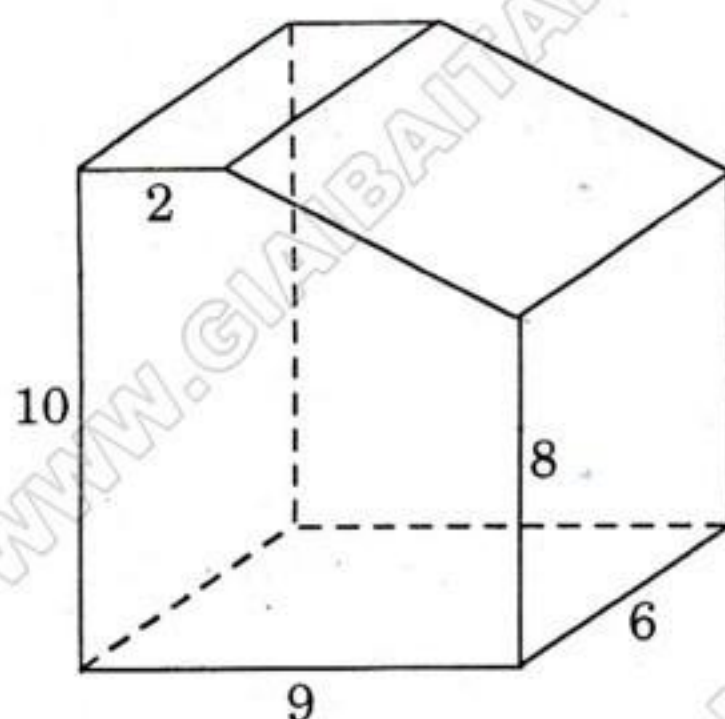
$$\text{mà } V = S_d \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{S_d} = \frac{60 \text{ m}^3}{5 \text{ m}^2} = 12 \text{ (m)}$$

Vậy AA' = 12 (m).

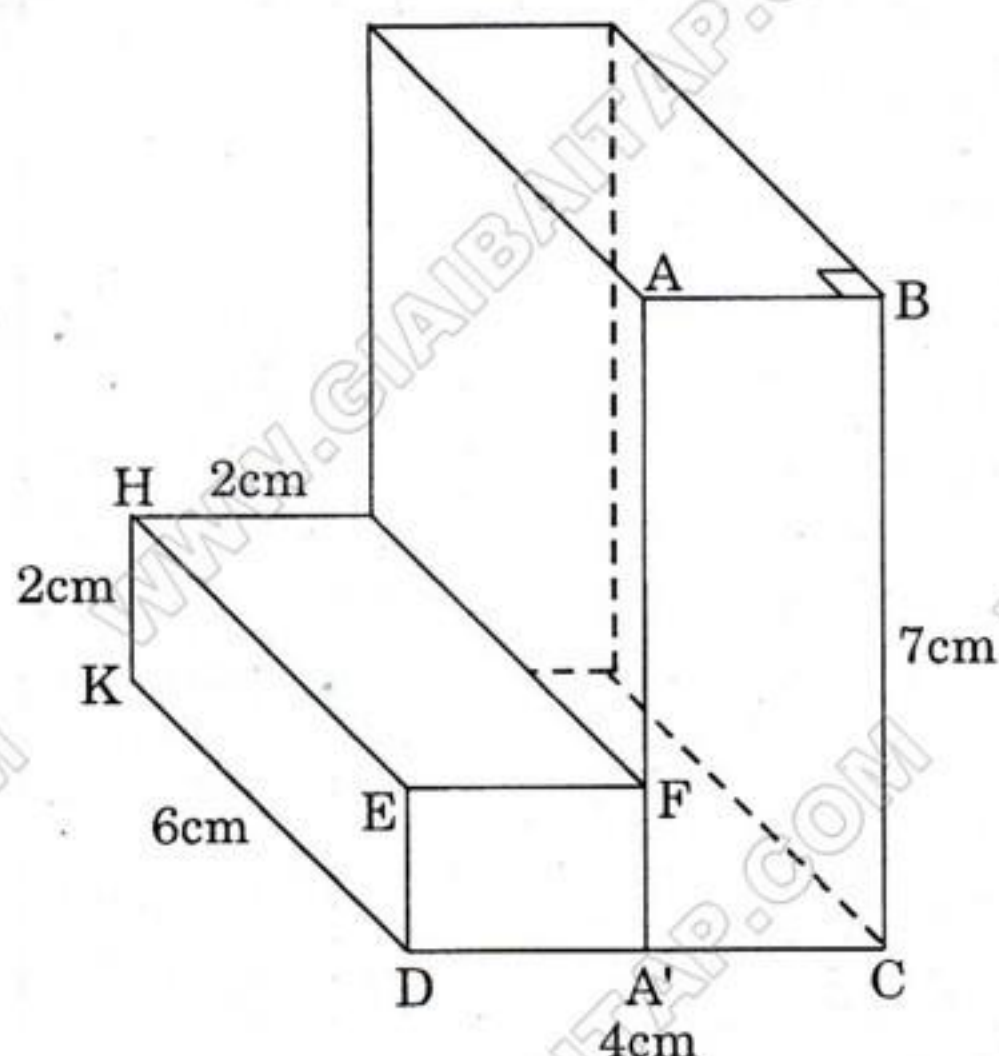
C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác đều cạnh a. Tính diện tích xung quanh và thể tích, biết chiều cao của hình AA' = 2a.

2. Tính thể tích của hình vẽ bên có kích thước như hình vẽ.



3. Tính thể tích hình vẽ bên có kích thước như hình vẽ.



Hướng dẫn

1. $S_{xq} = 6a^2$ (đvdt); $S_d = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (đvtt).

2. Phân hình đã cho thành hai lăng trụ đứng có cùng chiều cao là 6. Đáy của lăng trụ thứ nhất là hình chữ nhật dài 10 rộng 2 nên :

$$V_1 = 10.2.6 = 120.$$

Đáy của lăng trụ thứ hai là hình thang vuông có các cạnh đáy là 10, 8 và chiều cao là $9 - 2 = 7$ nên :

$$V_2 = \frac{(10+8).7}{2} .6 = 378$$

Vậy thể tích của hình đã cho là : $V_1 + V_2 = 120 + 378 = 498$.

3. Là một lăng trụ đứng có đáy hình chữ L, chiều cao là 6cm.

$$S_d = 7.2 + 2.2 = 18 \text{ (cm}^2\text{)}; \quad V = S_d.h = 18.6 = 108 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy $S_d.h = 18.6 = 108 \text{ (cm}^3\text{)}.$

§7, 8, 9. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

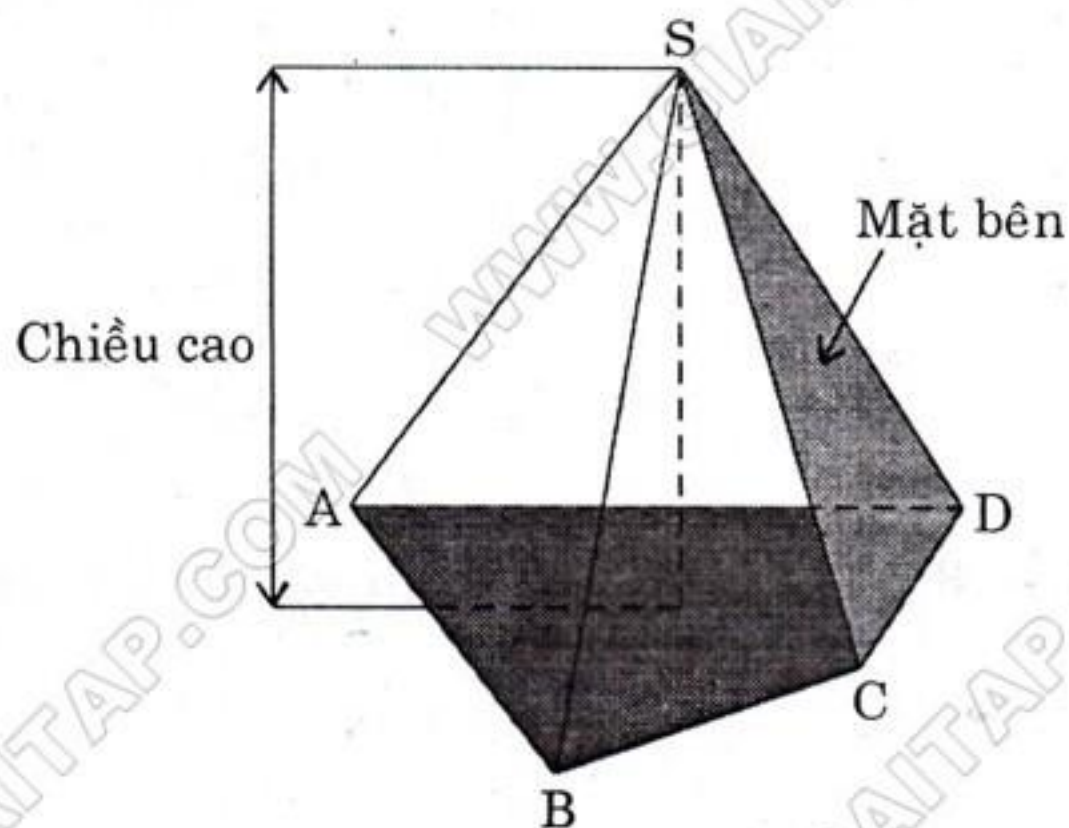
Diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp đều

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

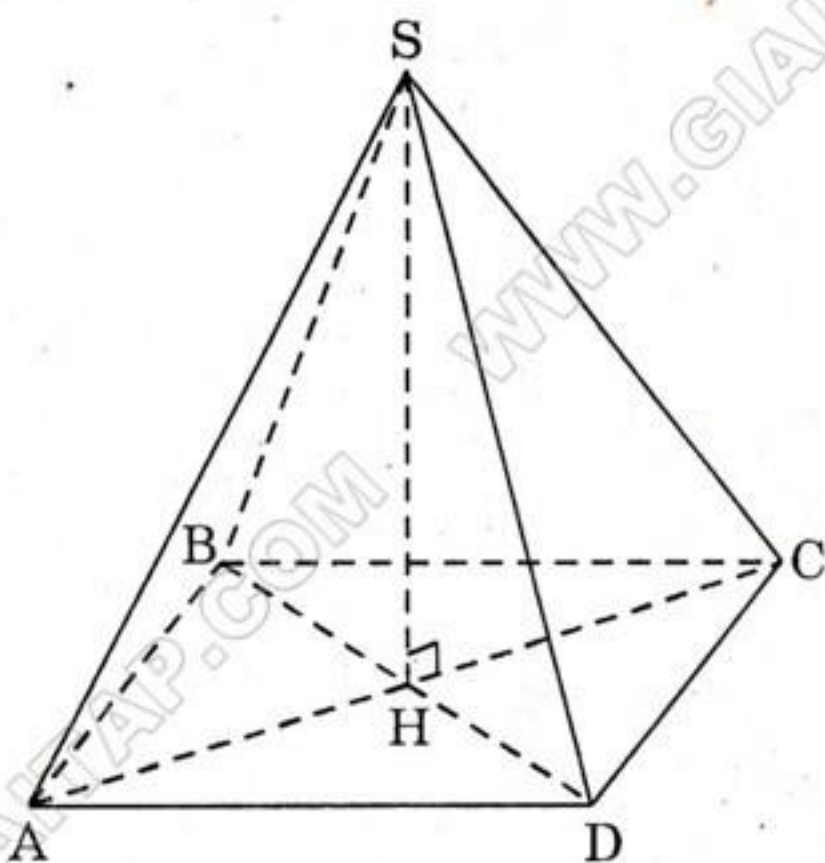
1. Hình chóp

Đáy là một đa giác

- Các mặt bên là những tam giác.
- Chung đỉnh.
- Đường vuông góc hạ từ đỉnh đến mặt đáy là đường cao.



2. Hình chóp đều



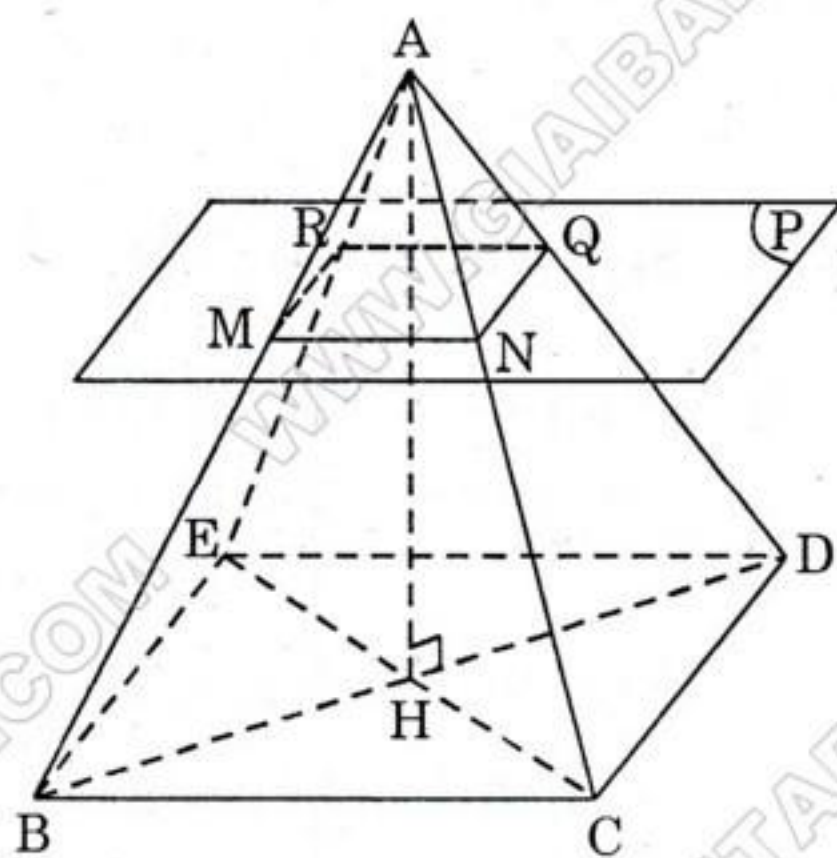
Là hình chóp có mặt đáy là một đa giác đều

- Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh (đỉnh của hình chóp).
- Các cạnh bên bằng nhau.
- Chiều cao mỗi mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp.

3. Hình chóp cụt đều

Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng P song song với đáy : phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy của hình chóp gọi là hình chóp cụt đều.

Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân.



4. Công thức

* $S_{xq} = p.d$ (p : nửa chu vi đáy, d : trung đoạn)

* Diện tích toàn phần bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy.

* $V = \frac{1}{3}S.h$ (S : diện tích đáy, h : chiều cao).

B. MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT

ĐỀ SỐ 1

Cho hình chóp đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên của hình chóp tạo với đường cao một góc 30° . Tính thể tích của hình chóp.

Giải

Gọi I là trung điểm cạnh AB ta có :

$$IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

$\triangle ABC$ đều nên đường trung tuyến CI đồng thời là đường cao, ta có :

$$CI = \sqrt{BC^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (định lí Py-ta-go)}$$

Vì S_{ABC} là hình chóp tam giác đều nên chân đường cao của hình chóp trùng với trọng tâm $\triangle ABC$. Khi đó :

$$CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

Mặt khác $\triangle SHC$ vuông tại H và có $\widehat{CSH} = 30^\circ$ (gt)

$$\Rightarrow SC = 2CH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó : } SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$$

$$\text{Vậy } S_d = \frac{1}{2}BA \cdot CI = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

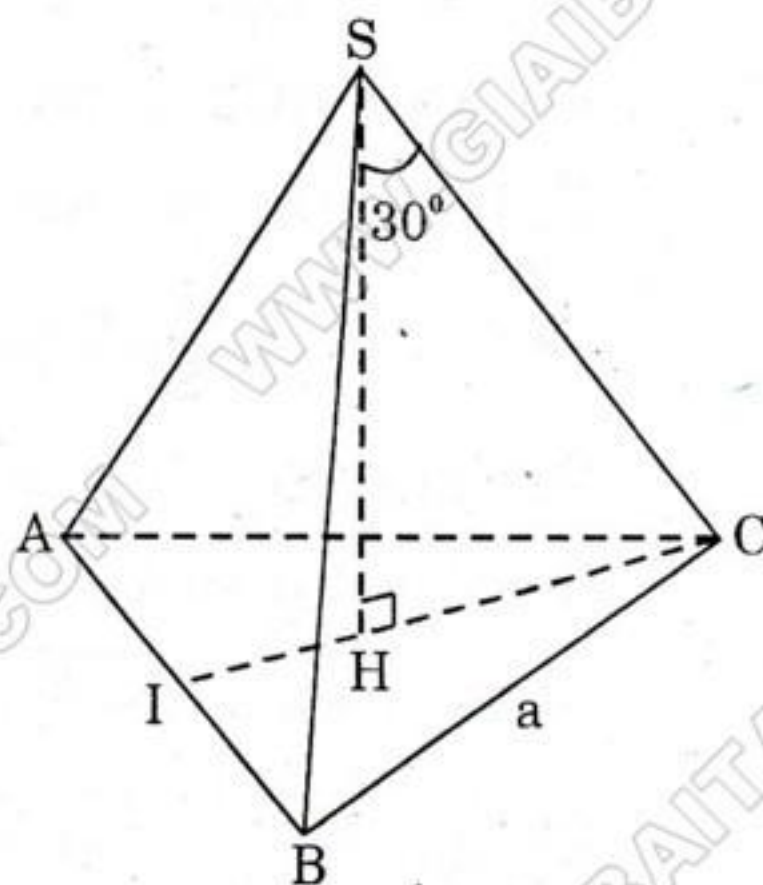
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \text{ (đvtt)}.$$

ĐỀ SỐ 2

Cho tam giác ABC vuông tại A , một đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm C . Trên d lấy điểm S , nối S với A và B .

a) Chứng tỏ $AB \perp SA$.

b) Cho $SC = 3\text{cm}$, $AB = 2\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Tính diện tích toàn phần của hình (biết $\sqrt{20} \approx 4,47$).



Giải

a) $d \perp mp(ABC)$ tại C nên SC là đường cao của hình chóp S.ABC

$$\Rightarrow SC \perp AB \quad (1) \quad (\text{vì } AB \in mp(ABC))$$

$$\text{mà } AB \perp AC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB \perp mp(SCA) \Rightarrow AB \perp SA.$$

$$\text{Tại có: } S_d = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Mặt khác } SC \perp mp(ABC) \Rightarrow SC \perp AC$$

Do đó $\triangle SCA$ vuông tại C :

$$SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (cm)}$$

$$\text{Khi đó: } S_{SCA} = \frac{1}{2} SC \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

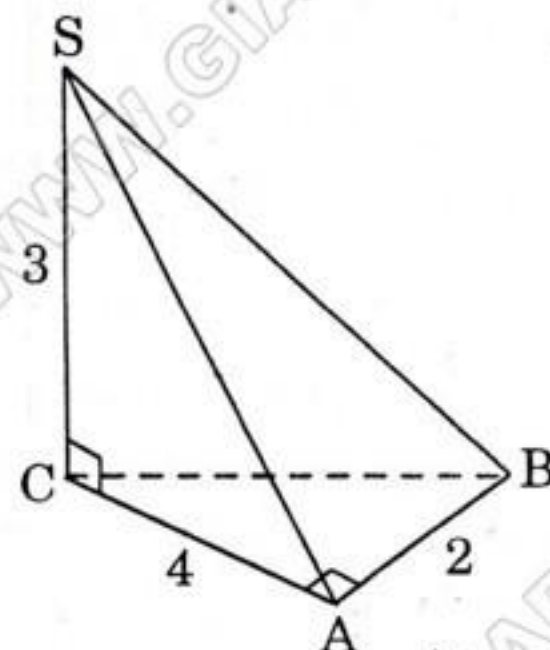
$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$CB = \sqrt{CA^2 + AB^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow S_{SCB} = \frac{1}{2} SC \cdot CB \approx \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4,47 \approx 6,71 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = S_{SCA} + S_{SAB} + S_{SCB} \approx 6 + 5 + 6,71 \approx 17,71 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy: } S_{tp} = S_{xq} + S_d \approx 17,71 + 4 \approx 21,71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 3

Cho hình chóp đều SABC có cạnh đáy là 5cm, và các mặt bên là những tam giác vuông cân đỉnh S. Tính diện tích toàn phần của hình.

Giải

Đáy ABC là tam giác đều cạnh 5. Gọi I là trung điểm của BC ta có

$$AI \perp BC \text{ và } IB = IC = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2} \text{ (cm)}$$

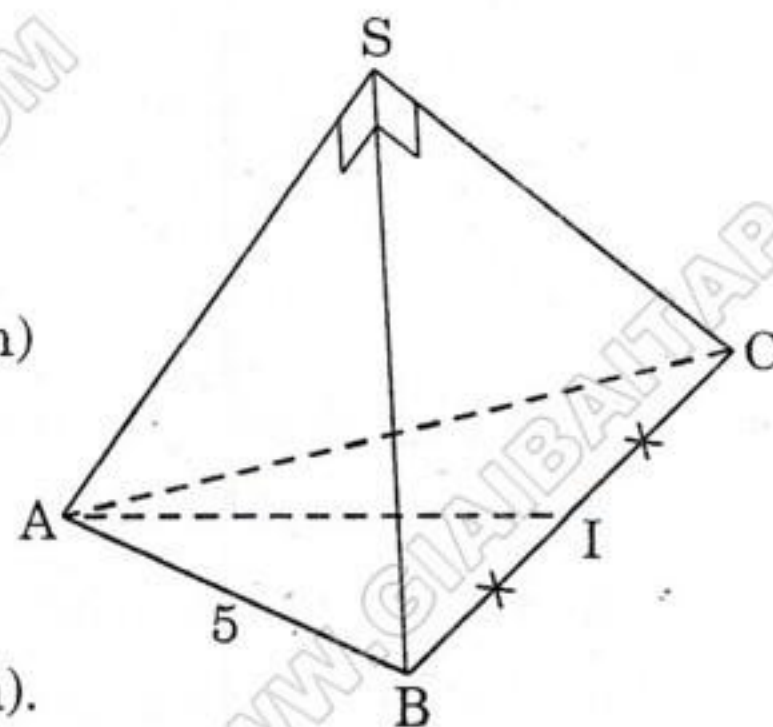
$\triangle AIB$ vuông ta có :

$$AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} \approx 4,3 \text{ (cm)}$$

$$S_d = \frac{1}{2} BC \cdot AI \approx \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4,3 \approx 10,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lại có $\triangle SAB$ vuông cân tại S có $AB = 5 \text{ (cm)}$.

$$\text{Đặt } SA = SB = x \text{ ta có: } x^2 + x^2 = 5^2 \Rightarrow 2x^2 = 25$$



$$\Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad (x > 0)$$

$$\text{Vậy } S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{xq} = 3 \cdot S_{SAB} = 3 \cdot \frac{25}{4} \approx 18,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy } S_{tp} = S_{xq} + S_d \approx 18,8 + 10,8 \approx 29,6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

ĐỀ SỐ 4

Cho hình chóp tứ giác SABC trong đó $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$.

a) Chứng minh $AB \perp BC$.

b) Gọi I là trung điểm của AC. Chứng minh $SI \perp mp(ABC)$.

Giải

a) $\triangle ASB$ vuông tại S có $SA = SB = a$ nên theo định lý Py-ta-go :

$$AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$\triangle BSC$ cân ($BS = CS$) có $\widehat{BSC} = 60^\circ$ nên đều
 $\Rightarrow BC = a$.

Vì I là trung điểm AC (gt)

mà $\triangle ASC$ cân ($SA = SC = a$)

$$\Rightarrow SI \perp AC \text{ và } \widehat{ISA} = \widehat{ISC} = \frac{\widehat{ASC}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

Do đó $\triangle AIS$ là nửa tam giác đều có cạnh $SA = a \Rightarrow SI = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$$

Trong $\triangle ABC$ có : $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow (a\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$

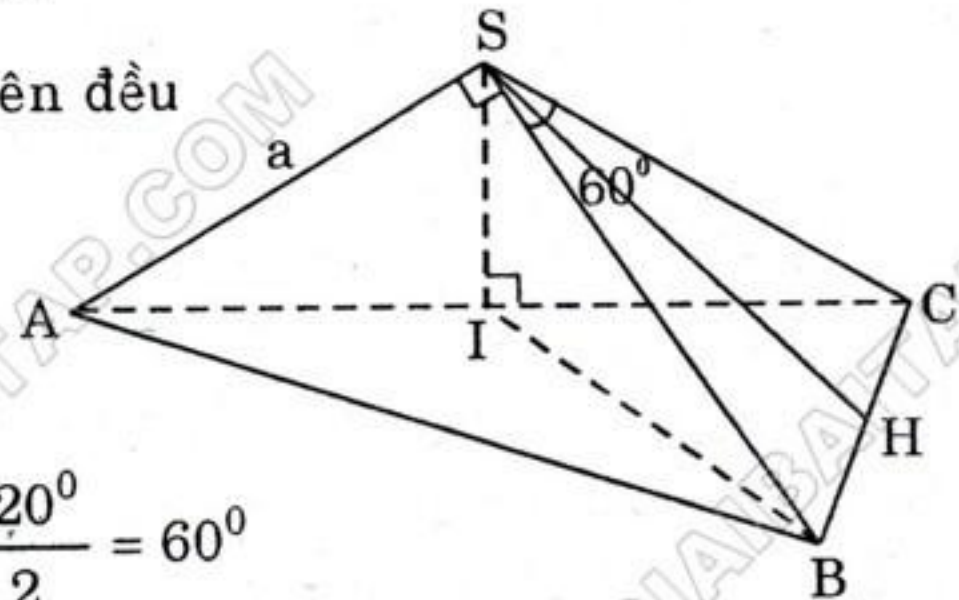
nên theo định lý Py-ta-go đảo $\triangle ABC$ vuông tại B hay $AB \perp BC$.

b) $\triangle ABC$ vuông tại B có BI là đường trung tuyến nên $IB = IA = IC$

\Rightarrow các tam giác SIA, SIB, SIC bằng nhau (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{SIB} = \widehat{SIA} = 90^\circ$ hay $SI \perp IB$ lại có $SI \perp AC$.

Do đó $SI \perp mp(ABC)$.



ĐỀ SỐ 5

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp đáy của hình chóp lục giác đều là 6cm. Cạnh bên của hình chóp là 10cm.

Tính thể tích của hình chóp.

Giải

S.ABCDEF là hình chóp lục giác đều nên chân của đường cao trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của đáy.

Ta có $SO \perp mp(ABCDEF) \Rightarrow SO \perp OB$ nên $\triangle SOB$ vuông tại O :

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}$$

Vì đáy ABCDEF là lục giác đều nên 6 tam giác sau đây đều và bằng nhau :

$$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOE = \triangle EOF = \triangle FOA.$$

Gọi I là trung điểm của AB ta có $IO \perp AB$ (Trong tam giác đều đường trung tuyến đồng thời là đường cao). Theo định lí Py-ta-go :

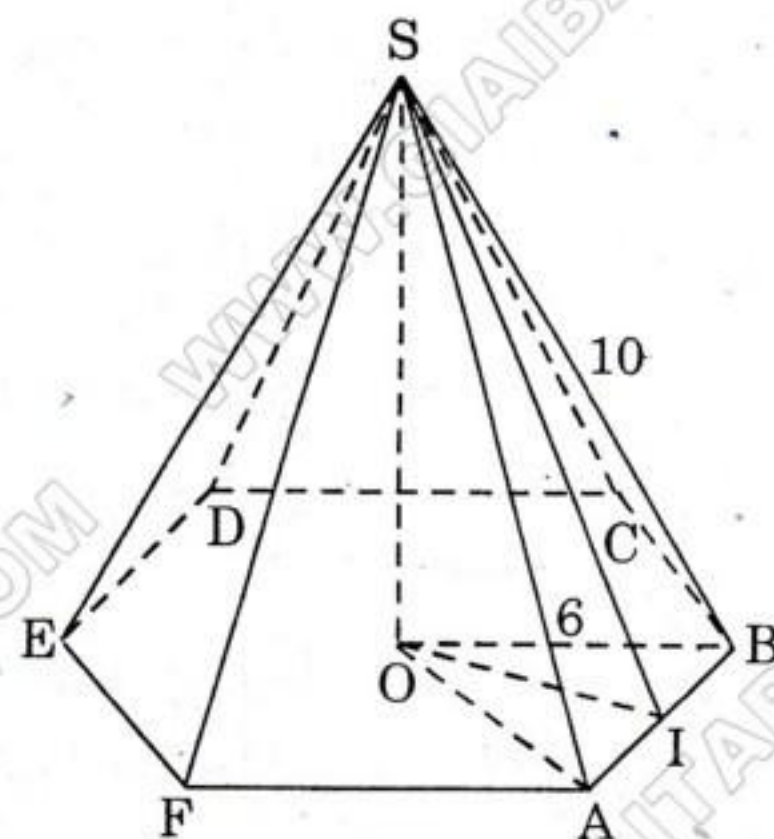
$$OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ (cm)}$$

Ta có $\triangle AOB$ đều có cạnh 6cm, có diện tích là :

$$S_{AOB} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \approx 15,59 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Do đó : } S_d = 6.S_{AOB} = 6.15,59 = 93,54 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_d . h = \frac{1}{3} . 93,54 . 8 \approx 249,44 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 6

Một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên bằng 30cm, đáy là hình vuông MNPQ cạnh 48cm.

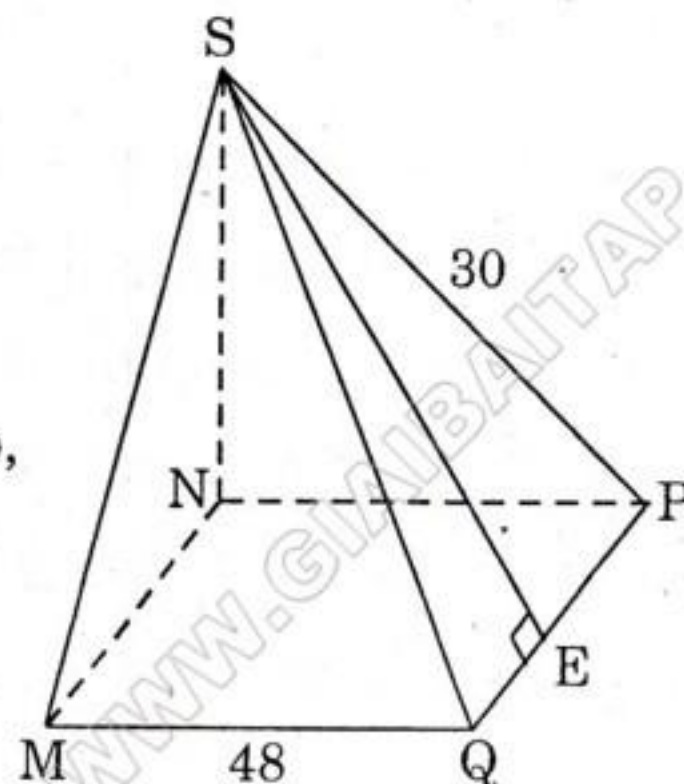
Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải

Gọi SE là một trung đoạn của hình chóp đều.

Tam giác SPE vuông tại E, theo định lí Py-ta-go, ta có : $SE^2 + EP^2 = SP^2$

$$\Rightarrow SE^2 = SP^2 - EP^2 = SP^2 - \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 = 30^2 - 24^2$$



Nên : $SE = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18 \text{ (cm)}$.

Diện tích xung quanh của hình chóp đều :

$$S_{xq} = p.d = 2.48.18 = 1728 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích đáy là : $S_d = 48.48 = 2304 \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích toàn phần của hình chóp đều : $1728 + 2304 = 4032 \text{ (cm}^2\text{)}$.

ĐỀ SỐ 7

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy $AB = \sqrt{162} \text{ cm}$, cạnh bên $SA = 15 \text{ cm}$. Tính chiều cao và thể tích của hình chóp.

Giải

Mặt đáy ABCD là hình vuông nên $AC \perp BD$ và $AC = BD$.

Ta có $\triangle AHB$ vuông tại H $\Rightarrow HA^2 + HB^2 = AB^2$

$$\Rightarrow 2HA^2 = (\sqrt{162})^2$$

$$\Rightarrow HA^2 = 81$$

$$\Rightarrow HA = 9 \text{ cm}$$

$SH \perp mp \text{ (ABCD)} \Rightarrow SH \perp AH$.

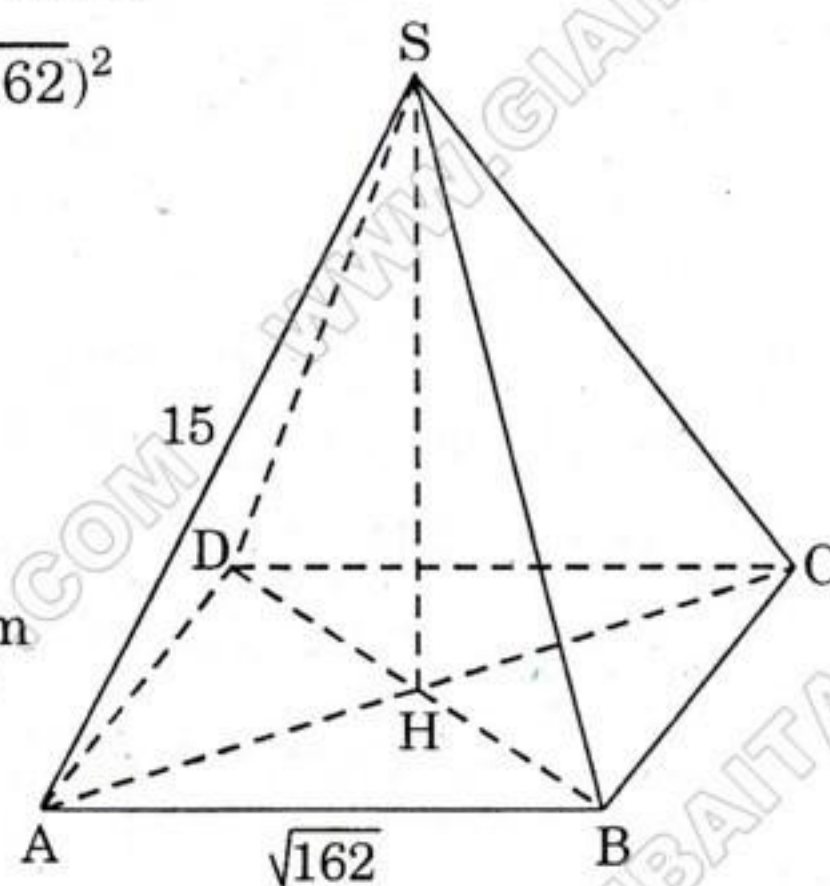
Trong tam giác vuông SHA ta có :

$$SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}$$

Vậy chiều cao của hình chóp là 12 cm.

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} . SH = \frac{1}{3} (\sqrt{162})^2 . 12$$

$$= 648 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 8

Một hình chóp tứ giác đều S.ABCD có độ dài cạnh đáy là $AB = 12 \text{ cm}$, cạnh bên $SA = 10 \text{ cm}$.

Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

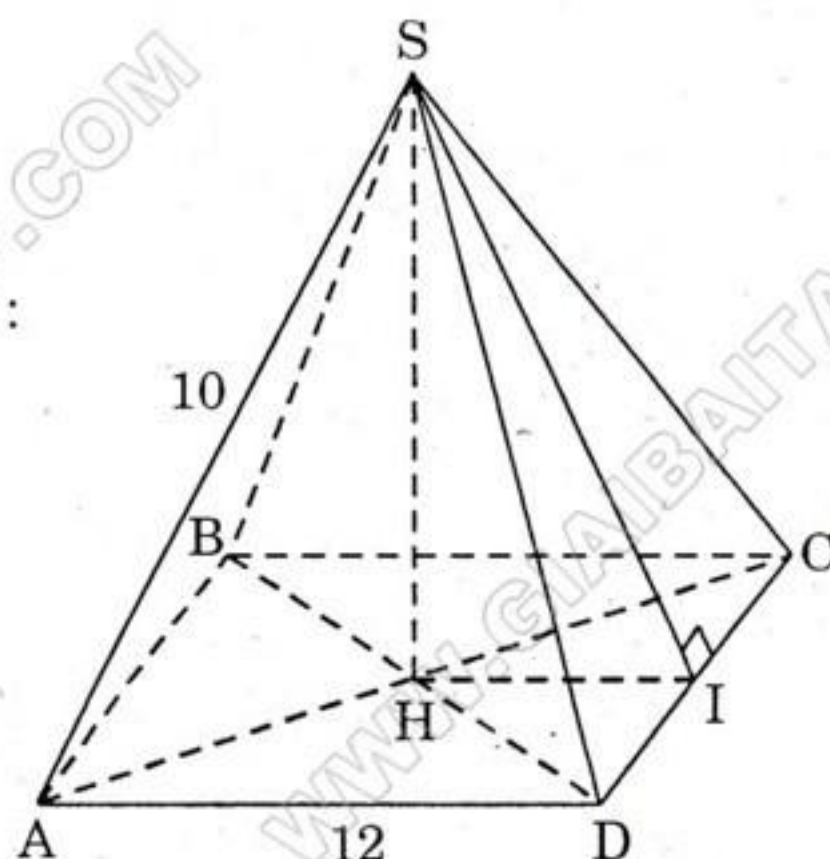
Giải

Gọi SI là trung đoạn của hình chóp ta có :

$$DI = CI = \frac{CD}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$$

Trong tam giác vuông SID theo định lý Py-ta-go ta có :

$$SI = \sqrt{SD^2 - DI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}$$



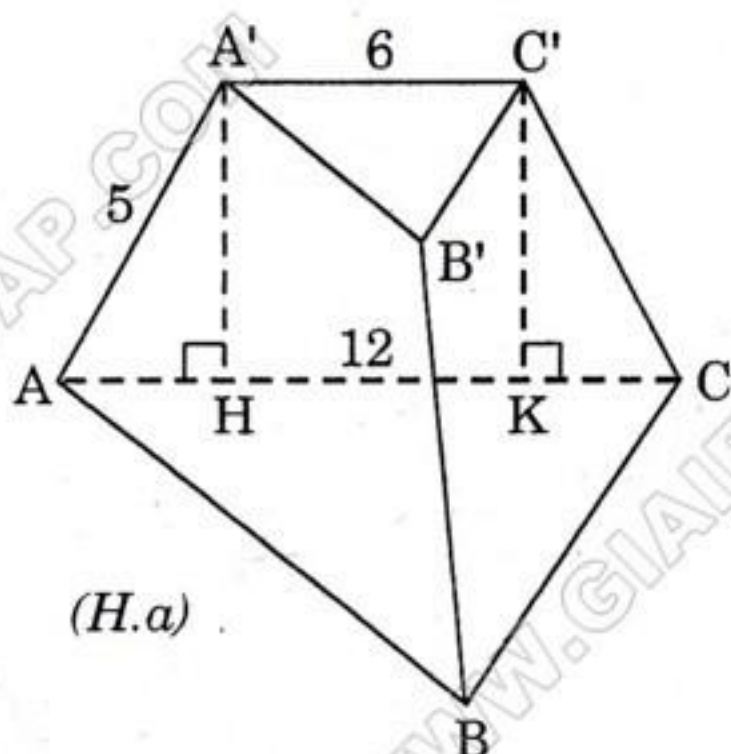
$$\text{Vậy } S_{xq} = p.d = \frac{4.12}{2} . 8 = 192 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 192 + 12^2 = 336 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

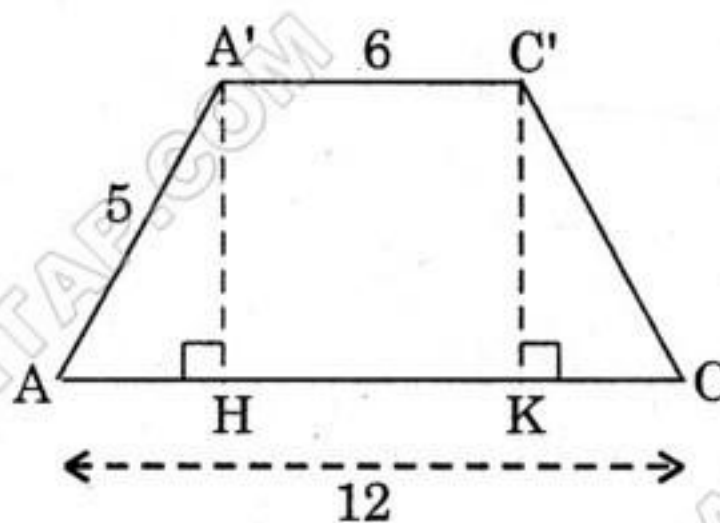
ĐỀ SỐ 9

Cho hình chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đáy là 12cm, 6cm và cạnh bên là 5cm. Tính diện tích xung quanh của hình.

Giải



(H.a)



(H.b)

Các mặt bên của hình chóp cắt tam giác đều là những hình thang cân.

Xét hình b. Hạ $A'H$, $C'K$ lần lượt vuông góc với AC .

Ta có $\triangle A'HA = \triangle C'KC$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow A'H = C'K$

và tứ giác $A'C'KH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HK = A'C' = 6\text{cm}$

$$\Rightarrow AH = CK = \frac{AC - HK}{2} = \frac{12 - 6}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

Theo định lí Py-ta-go ta có : $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (cm)}$

$$S_{A'C'CA} = \frac{(A'C' + AC).AH}{2} = \frac{(6 + 12).4}{2} = 36\text{cm}^2$$

$$S_{xq} = 3.S_{A'C'CA} = 3.36 = 108\text{cm}^2.$$

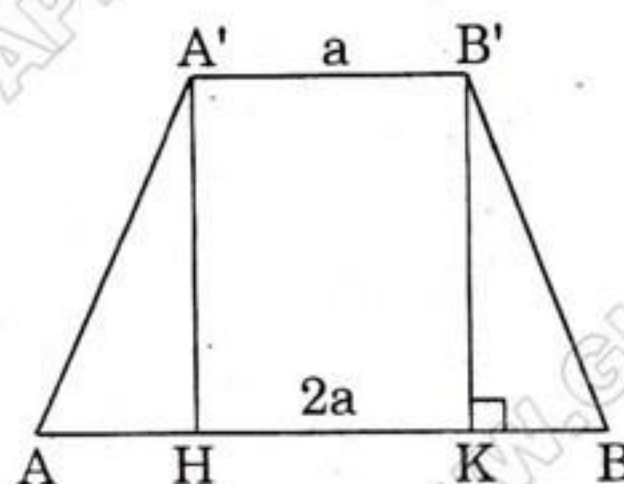
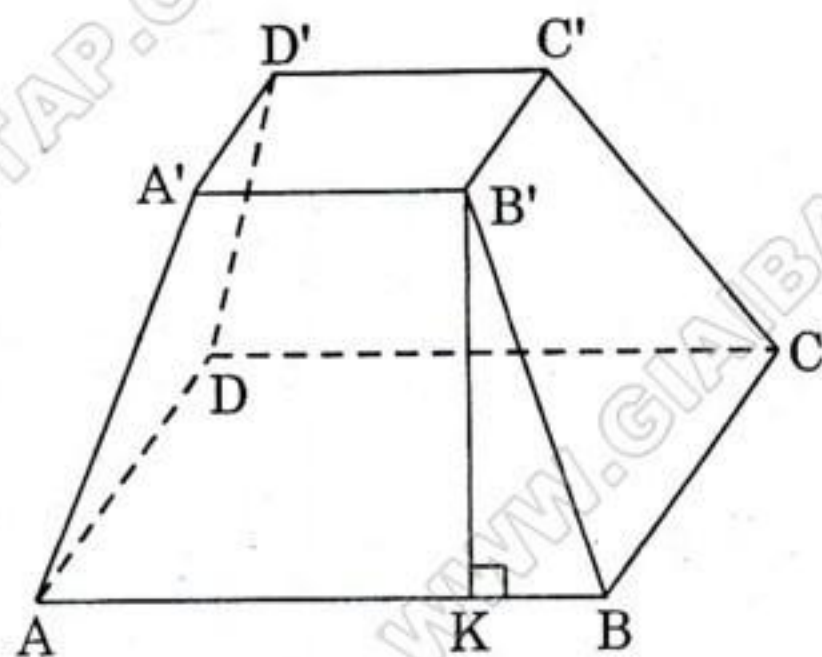
ĐỀ SỐ 10

Cho hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đáy là a và $2a$, đường cao của mặt bên bằng a . Tính diện tích xung quanh và cạnh bên của hình.

Giải

Các mặt bên của hình chóp cắt là các hình thang cân bằng nhau có hai đáy là a và $2a$.

$$S_{xq} = 4 \frac{(a + 2a).a}{2} = 6a^2 \text{ (đvdt)}$$



Xét hình thang cân AA'B'B.

Vẽ hai đường cao A'H, B'K ta có : $A'H = B'K = \frac{a}{2}$

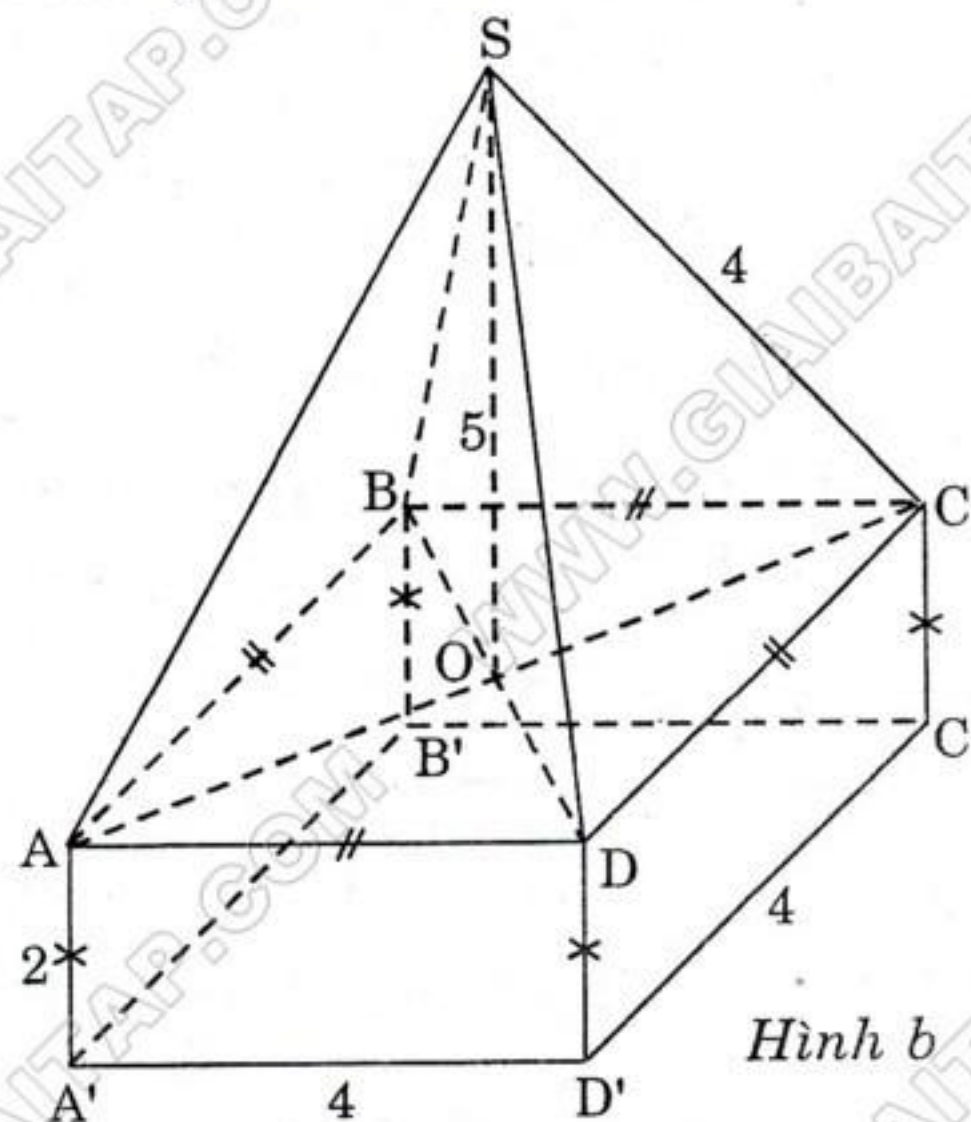
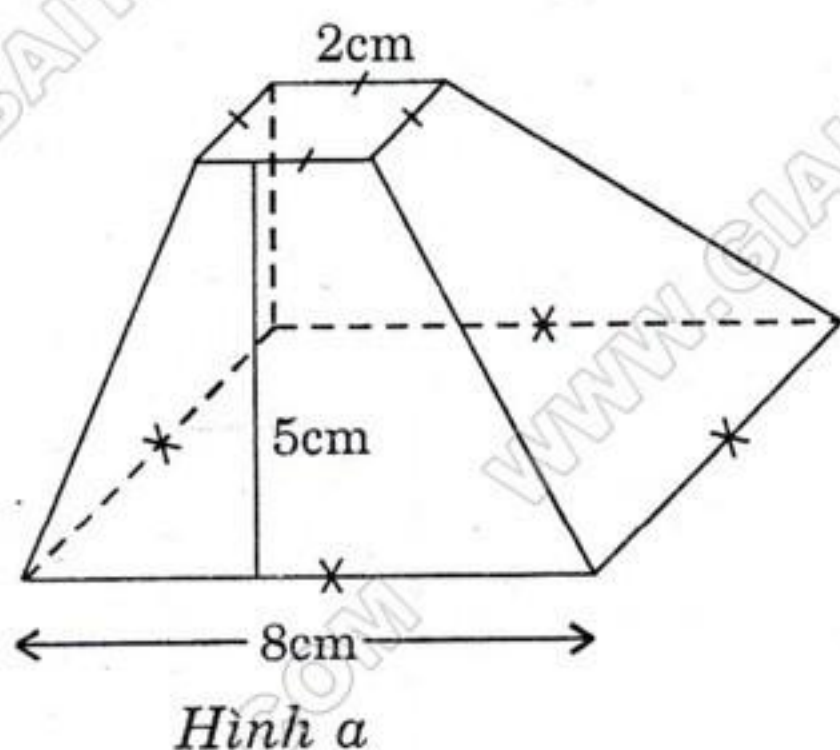
Xét tam giác vuông B'KB ta có :

$$BB' = \sqrt{B'K^2 + BK^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

1. Cho hình chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a , chiều cao là $2a$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp.
2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là 12cm . Cạnh bên của hình chóp là 10cm . Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp (biết $\sqrt{28} \approx 5,29$).

3.



- a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp cắt đều ở hình a.
- b) Tính thể tích của hình b. Biết các kích thước đã cho trên hình.

Hướng dẫn

1. S.ABC là hình chóp tam giác đều nên chân đường cao chính là tâm

của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có : $SO = 2a$.

Gọi I là giao điểm của CO với AB, ta có : $IB = IA = \frac{a}{2}$; $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Do đó : } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CI = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$OI = \frac{1}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ (đvd)}$$

SO là chiều cao của hình chóp S.ABC nên $SO \perp mp(ABC) \Rightarrow SO \perp OI$

$$\Rightarrow SI = \frac{7a}{\sqrt{12}} \text{ (đvd)}; \text{ diện tích } \triangle SAB = \frac{7a^2}{2\sqrt{12}}$$

$$S_{xq} = 3.S_{SAB} = \frac{21a^2}{2\sqrt{12}} \text{ (đvdt)}; V = \frac{1}{3}S_d.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \text{ (đvtt)}.$$

2. Đáy là hình vuông cạnh 12cm, $IA = IB = 6$ (cm) (I là trung điểm của AB). Ta có : $SI = 8$ (cm) \Rightarrow Diện tích mặt bên SAB = 48 (cm²)

$$S_{xq} = 4.48 = 192 \text{ (cm}^2\text{)}; \text{ Diện tích đáy} = 144 \text{ (cm}^2\text{)}; S_{tp} = 336 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình vuông ABCD, ta có :

$$SO \perp mp(ABCD); SO \perp OI \text{ và } OI = \frac{CB}{2} = 6 \text{ (cm)}; SO = 5,29 \text{ (cm)}$$

$$V = \frac{1}{3}S_d.h = 253,92 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

3. $S_{xq} = 100 \text{ (cm}^2\text{)}$

Hình b gồm hình hộp chữ nhật có các cạnh 4,4 và 2 và một hình chóp tứ giác đều cạnh 4 và chiều cao 5.

Thể tích hình hộp chữ nhật $V = 32 \text{ (cm}^3\text{)}$, thể tích hình chóp tứ giác đều $V = \frac{80}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$. Vậy thể tích cần tìm là $\frac{176}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA MỘT TIẾT

ĐỀ SỐ 1

1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng $AA' \perp mp(ABCD)$.

b) Cho $AB = 12\text{cm}$, $AD = 16\text{cm}$, đường chéo $A'C = 25\text{cm}$. Tính thể tích của hình hộp.

2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao là 3cm. Thể tích là 16cm^3 .

a) Tính độ dài cạnh đáy.

b) Tính diện tích xung quanh.

3. Cho hình chóp cụt tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy là 2cm và 8cm, đường cao của mặt bên bằng 4cm. Tính cạnh bên của hình.

Giải

1. a) Các mặt bên $ABB'A'$ và $ADD'A'$ là các hình chữ nhật nên $AA' \perp AB$ và $AA' \perp AD \Rightarrow AA' \perp mp(ABCD)$.

b) Xét tam giác vuông ADC, ta có :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 \text{ (định lí Py-ta-go)} \\ &= 16^2 + 12^2 \\ &= 400 \end{aligned}$$

Mặt khác $AA' \perp mp(ABCD)$ (cmt)

$$\Rightarrow AA' \perp AC$$

Xét tam giác vuông $A'AC$ ta có :

$$AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{25^2 - 400} = 15 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy : } V = 12.16.15 = 2880 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2. a) Ta có : $V = \frac{1}{3}S.h$

$$\Rightarrow S = \frac{3}{h}.V = \frac{3}{3}.16 = 16 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \text{Cạnh đáy } a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ (cm)}.$$

b) Gọi I là trung điểm của BC ta có SI là trung đoạn của hình chóp. Gọi SH là chiều cao của hình chóp, ta có ΔSHI vuông tại H

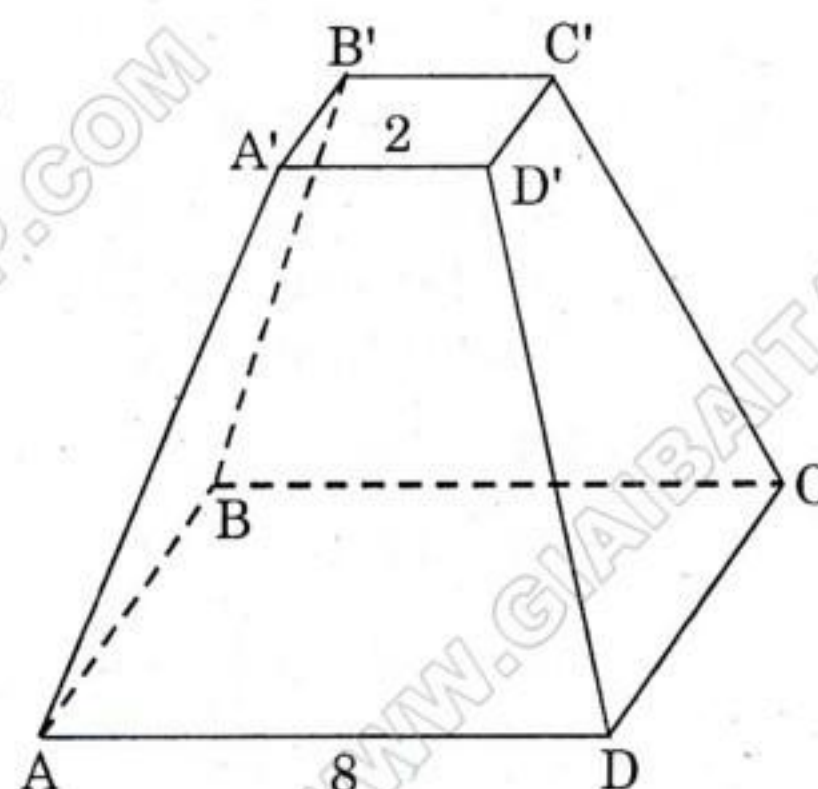
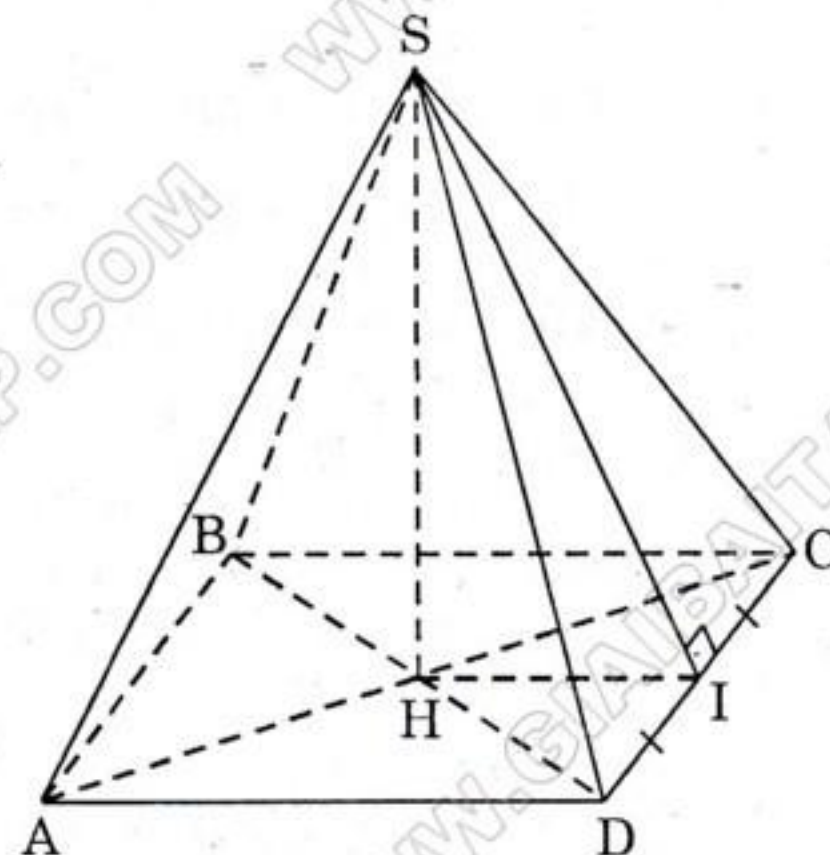
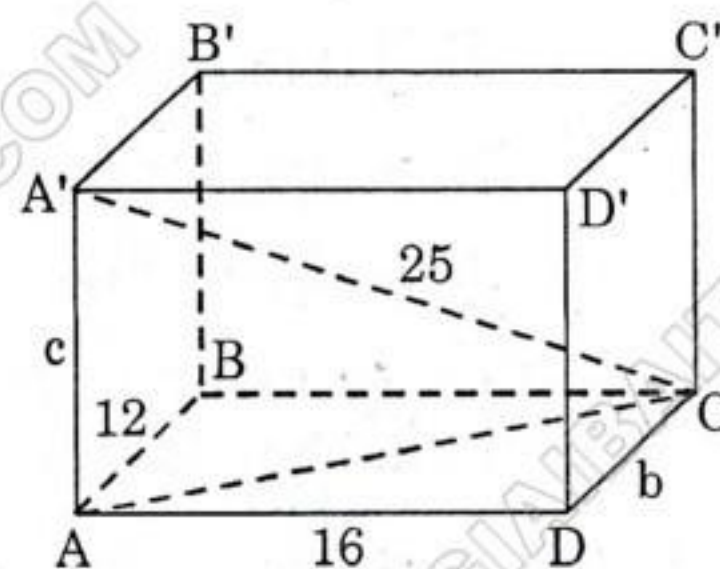
$$\text{và } SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = p.d = 2.4.\sqrt{13} = 8\sqrt{13} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3. Các mặt bên của hình chóp cụt tứ giác đều là các hình thang cân có các cạnh đáy là 2cm và 8cm (Xem hình b).

Vẽ $A'H$ và $B'K$ cùng vuông góc với AB, ta có :

$$AH = BK = \frac{AB - HK}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3 \text{ (cm)}$$



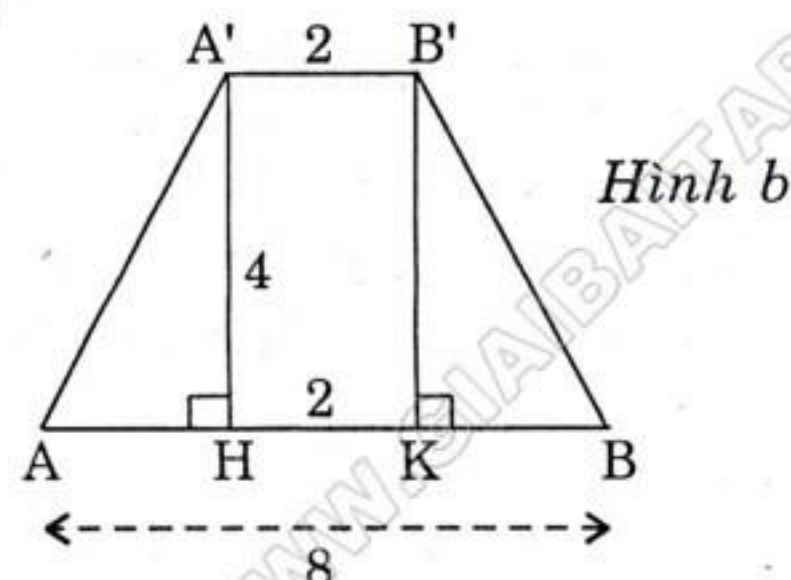
Hình a

Xét tam giác vuông A'HA ta có :

$$\begin{aligned} AA'^2 &= AH^2 + A'H^2 \quad (\text{định lí Py-ta-go}) \\ &= 4^2 + 3^2 = 25 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AA' = 5 \text{ (cm)}$$

Vậy cạnh bên của hình chóp cắt tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' là $AA' = 5 \text{ (cm)}$.



ĐỀ SỐ 2

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng hình chóp D.AD'C là hình chóp đều.

b) Cho cạnh của hình lập phương là a. Tính thể tích của hình chóp B.AB'C.

2. Tính diện tích đáy của hình chóp đều biết thể tích là 35cm^3 , chiều cao của hình chóp là 5cm.

3. Cho hình chóp cắt tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đáy là 6cm và 12cm, đường cao của hình chóp là 7cm. Tính diện tích toàn phần của hình.

Giải

1. a) Các mặt của hình lập phương đều là những hình vuông nên

$$DA = DC = DD' = a \quad \text{và} \quad AC = AD' = D'C = a\sqrt{2}$$

Vậy hình chóp D.AD'C là hình chóp đều.

$$b) S_{ADC} = \frac{1}{2} DA \cdot DC = \frac{1}{2} a^2$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} S_{ADC} \cdot DD' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3.$$

2. Ta có : $V = \frac{1}{3} S \cdot h$

$$\Rightarrow S = \frac{3V}{h} = \frac{3 \cdot 35}{5} = 21 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

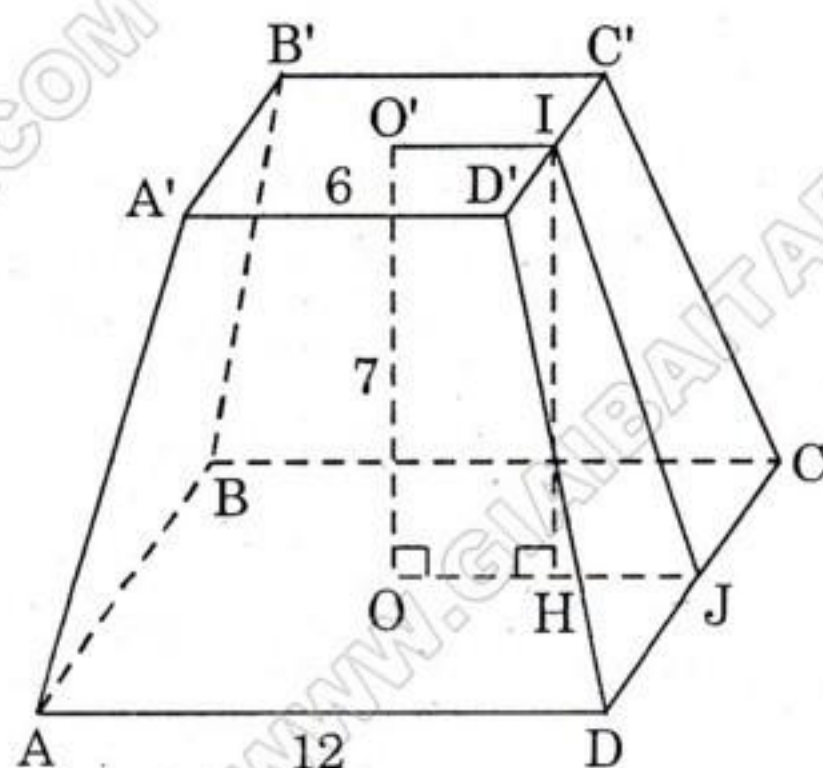
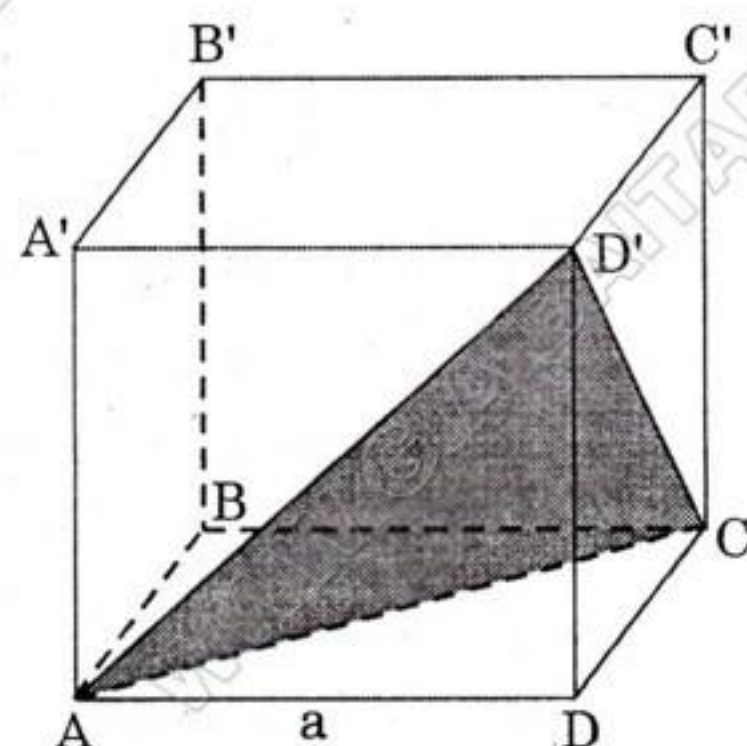
3. Ta thấy các mặt bên của hình chóp cắt tứ giác đều là các hình thang cân có đáy là 6cm và 12cm và đường cao là IJ (xem hình b)

Kẻ $IH \perp OJ$, ta có :

$$OH = OI = 3\text{cm}$$

$$\Rightarrow HJ = OJ - OH = 6 - 3 = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{và } IH = O'O = 7 \text{ (cm)}$$



Hình a

Xét $\triangle IHJ$ vuông tại H, ta có :

$$IJ^2 = IH^2 + JH^2 \quad (\text{định lí Py-ta-go})$$

$$= 7^2 + 3^2 = 58 \Rightarrow IJ = \sqrt{58} \text{ (cm)}$$

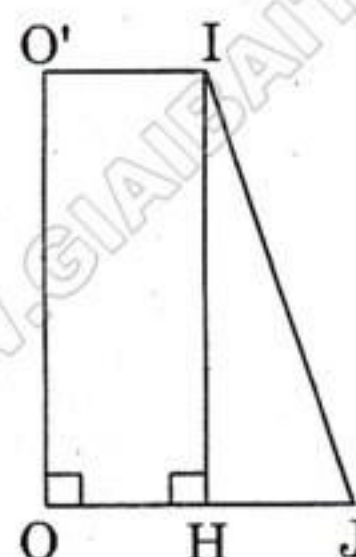
Vậy diện tích một mặt bên là : $\frac{(6 + 12) \cdot \sqrt{58}}{2} = 9\sqrt{58} \text{ (cm}^2\text{)}$

Do đó diện tích xung quanh $S_{xq} = 36\sqrt{58} \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích đáy trên $S_1 = 6 \times 6 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích đáy dưới $S_2 = 12 \times 12 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy $S_{tp} = S_{xq} + S_1 + S_2 = 36\sqrt{58} + 36 + 144$
 $= 36\sqrt{58} + 180 = 36(\sqrt{58} + 5) \text{ (cm}^2\text{)}.$



Hình b

ĐỀ SỐ 3

1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh $BB' \perp mp(ABCD)$.

b) Cho $BC = 4\text{cm}$, đường chéo $B'D = 10\text{cm}$ và $\widehat{B'DB} = 60^\circ$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình.

2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Tính thể tích của hình.

Giải

1. a) Các mặt bên của hình hộp chữ nhật là các hình chữ nhật nên $BB' \perp AB$ và $BB' \perp BC \Rightarrow BB' \perp mp(ABCD)$.

b) Theo chứng minh trên $BB' \perp mp(ABCD) \Rightarrow BB' \perp BD$.

Xét tam giác vuông B'BD, ta có : $BD = \frac{1}{2}B'D = 5 \text{ (cm)}$

Mặt khác, theo định lí Py-ta-go :

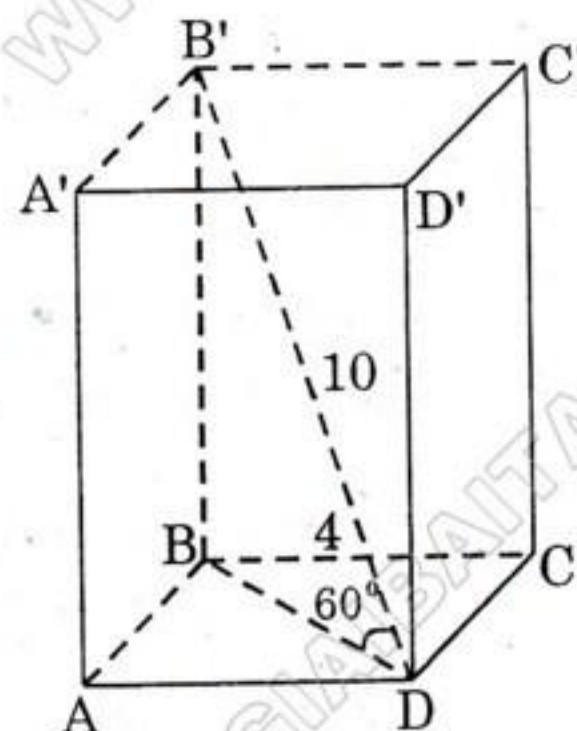
$$BB' = \sqrt{B'D^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \text{ (cm)}$$

Xét tam giác vuông BCD, ta có :

$$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (cm)}$$

Vậy $V = 4.3.\sqrt{75} = 12\sqrt{75} \text{ (cm}^3\text{)}$

$$S_{xq} = p.h = 2(3 + 4).\sqrt{75} = 14\sqrt{75} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



2. S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao của hình chóp trùng với trọng tâm của đáy. Gọi I là trung điểm của BC, ta có :

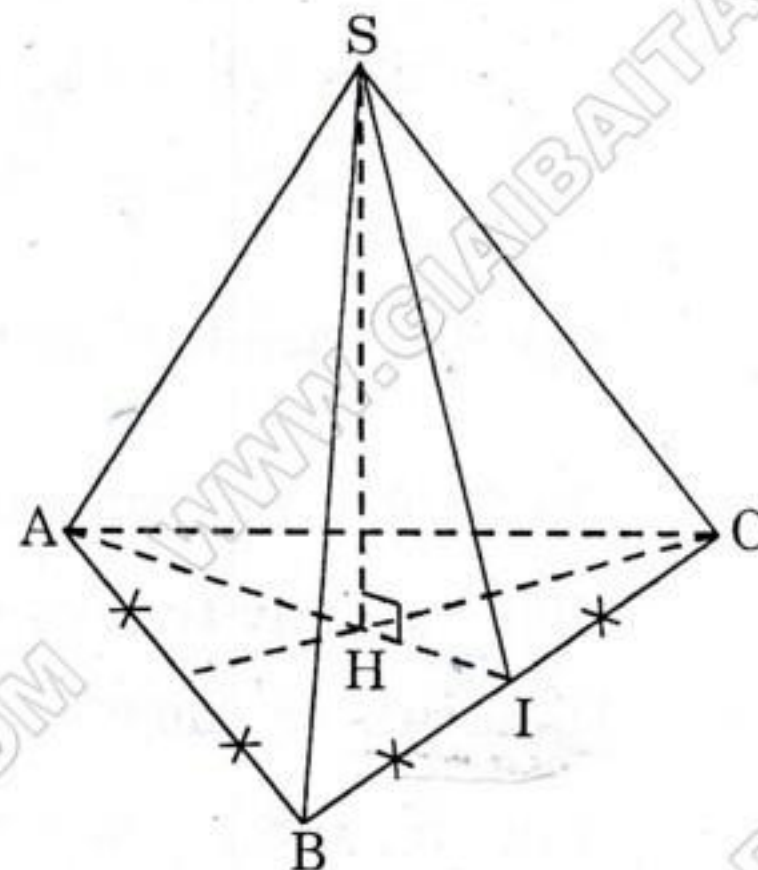
$$AI \perp BC \quad \text{và} \quad IB = IC = \frac{a}{2}.$$

Xét tam giác vuông AIB, ta có :

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó : } IH = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Tương tự, với tam giác đều SBC cạnh a, ta cũng có $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Trong tam giác SHI vuông tại H, ta có :

$$SH^2 = SI^2 - IH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{24a^2}{36}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{24}}{6}.$$

$$\text{Gọi diện tích } \triangle ABC \text{ là } S = \frac{1}{2}BC \cdot AI = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{24}}{6} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{24}}{24}.$$

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II

ĐỀ SỐ 1

1. Cho bất phương trình : $\frac{2(x+1)}{3} - 2 \geq \frac{x-2}{2}.$

a) Giải bất phương trình trên.

b) Biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

2. Hai người cùng làm chung một công việc hết 12 ngày. Năng suất trong một ngày của người thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ năng suất người thứ nhất. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu mới xong công việc ?

3. Giải phương trình :

a) $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{3(x+1)}{x} = 5$ (1)

b) $|1 - 2x| = 2x - 1$ (2)

4. Cho $a > 0$ và $b > 0$. Chứng minh rằng : $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$.

5. Cho hình bình hành ABCD, đường chéo BD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Tìm tỉ số diện tích của tam giác AMN và hình bình hành ABCD.

6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, biết $AB = 15\text{cm}$, $AC = 13\text{cm}$ và đường cao $AH = 12\text{cm}$. Gọi N, M lần lượt là hình chiếu vuông góc của H xuống AC và AB.

a) Chứng minh rằng $\triangle AHN$ và $\triangle ACH$ đồng dạng.

b) Tính độ dài BC.

c) Chứng minh $\triangle AMN$ và $\triangle ACB$ đồng dạng.

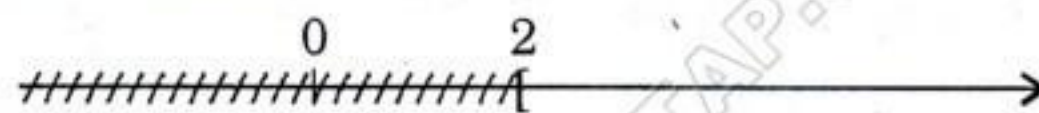
d) Tính MN.

Giải

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } \frac{2(x+1)}{3} - 2 &\geq \frac{x-2}{2} \Leftrightarrow 4(x+1) - 12 \geq 3(x-2) \\ &\Leftrightarrow 4x + 4 - 12 \geq 3x - 6 \\ &\Leftrightarrow 4x - 3x \geq 8 - 6 \Leftrightarrow x \geq 2 \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \geq 2\}$.

b) Biểu diễn tập nghiệm trên trục số :



2. Gọi x là số ngày để người thứ nhất làm một mình xong công việc ($x \in \mathbb{N}^*$ và x tính bằng ngày).

Một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc);

Một ngày người thứ hai làm được $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$ (công việc) hay $\frac{2}{3x}$ (công việc).

Một ngày cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$ (công việc).

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12 + 8 = x \Leftrightarrow x = 20$ (nhận)

Trả lời : Người thứ nhất làm trong 20 ngày; người thứ hai làm trong 30 ngày.

3. a) Điều kiện : $x \neq 0$ và $x \neq 1$

MTC : $x(x-1)$. Quy đồng và khử mẫu, ta được :

$$2x^2 + 3(x^2 - 1) = 5x(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x^2 - 3 = 5x^2 - 5x$$

$$\Leftrightarrow 5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \text{ (thỏa mãn các điều kiện)}$$

$$\text{Tập nghiệm của (1)} : S = \left\{ \frac{3}{5} \right\}.$$

$$b) (2) \Leftrightarrow |1 - 2x| = 2x - 1 \Leftrightarrow |2x - 1| = 2x - 1$$

$$\text{Ta biết } |A| = A \text{ nếu } A \geq 0. \text{ Vậy } 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tập nghiệm của (2)} : S = \left\{ x \mid x \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

$$4. \text{ Ta có : } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)(a + b) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{b^2 + a^2}{ab} \geq 2$$

$$\text{Vì } a > 0 \text{ và } b > 0 \Rightarrow ab > 0.$$

$$\text{Vậy } \frac{b^2 + a^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow b^2 + a^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

$$5. \text{ Nối } N \text{ với } B. \text{ Ta có : } S_{AMN} = S_{BMN} = \frac{1}{2} S_{ABN}$$

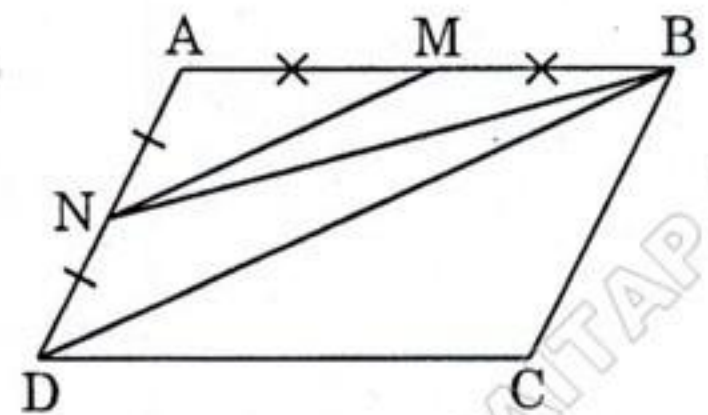
(chung đường cao kẻ từ N và hai đáy $MA = MB$).

Tương tự N là trung điểm của AD nên :

$$S_{ABN} = S_{DBN} = \frac{1}{2} S_{ABD}.$$

$$\text{Lại có } \triangle ABD = \triangle CDB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow S_{ABD} = S_{CDB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\text{Do đó : } S_{AMN} = \frac{1}{8} S_{ABCD}.$$



$$6. a) \text{ Dễ thấy } \triangle ANH \sim \triangle AHC \text{ (g.g).}$$

$$b) \text{ Ta có : } BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ (cm) (định lí Py-ta-go)}$$

$$\text{Tương tự : } CH = 5 \text{ (cm)}$$

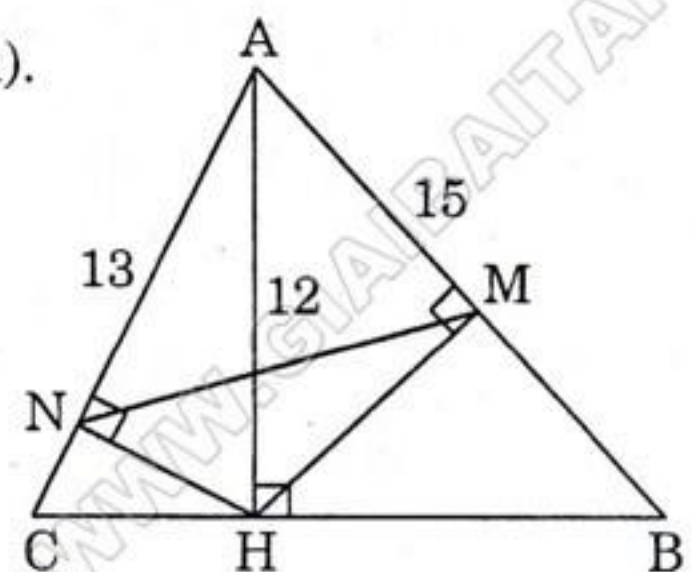
$$\Rightarrow BC = BH + CH = 9 + 5 = 14 \text{ (cm).}$$

c) Theo chứng minh trên ta có :

$$\triangle ANH \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AH}{AC}$$

$$\Rightarrow AH^2 = AN \cdot AC \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có :



$$\Delta AMH \sim \Delta AHB \Rightarrow AH^2 = AM \cdot AB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AN \cdot AC = AM \cdot AB \quad (3)$$

Xét ΔAMN và ΔACB có \hat{A} chung và (3) $\Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ACB$ (c.g.c).

d) Ta có $\Delta ANH \sim \Delta ANC$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AN = \frac{AH^2}{AC} = \frac{12^2}{13} \approx 11 \text{ (cm)}$$

Tương tự : $\Delta AMH \sim \Delta AHB$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AM = \frac{AH^2}{AB} = \frac{12^2}{15} \approx 9,6 \text{ (cm)}$$

Lại có $\Delta AMN \sim \Delta ACB$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{MN}{CB} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow MN = \frac{CB \cdot AM}{AC} = \frac{14 \cdot 9,6}{13} \approx 10 \text{ (cm)}.$$

ĐỀ SỐ 2

1. Giải bất phương trình : $\frac{3-2x}{10} \geq \frac{4x+5}{2}$ và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

2. Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B mất 5 giờ và ngược dòng từ bến B về bến A mất 6 giờ. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B, biết rằng vận tốc của dòng nước là 2km/h.

3. Giải phương trình :

a) $|2 - 4x| = 6$

b) $\frac{x}{x^2 - 25} = \frac{1}{x+5} + \frac{1-x}{x-5}$

c) $|x - 1| = 2x.$

4. Chứng minh rằng nếu $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}.$

5. Cho hình thang cân ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, CD và BD.

a) Chứng minh EFGH là hình thoi.

b) Hình thang cân ABCD phải có thêm điều kiện gì để EFGH là hình vuông.

6. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh ΔAEB và ΔAFC đồng dạng. Từ đó suy ra :

$$AF \cdot AB = AE \cdot AC.$$

b) Chứng minh $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}.$

c) Cho $AE = 3\text{cm}, AB = 6\text{cm}.$ Chứng minh rằng $S_{ABC} = 4S_{AEF}.$

d) Chứng minh $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Giải

$$1. \quad \frac{3-2x}{10} \geq \frac{4x+5}{2} \Leftrightarrow 3-2x \geq 5(4x+5) \Leftrightarrow 3-2x \geq 20x+25$$

$$\Leftrightarrow -22x \geq 22 \Leftrightarrow x \leq -1$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \leq -1\}$.

Biểu diễn trên trục số : 

2. Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h; $x > 0$).

Vận tốc khi xuôi dòng là $x + 2$ (km/h);

Vận tốc khi ngược dòng là $x - 2$ (km/h). Điều kiện $x > 2$.

Khoảng cách AB là $5(x + 2)$ và khoảng cách BA là $6(x - 2)$.

Ta có phương trình : $5(x + 2) = 6(x - 2)$

$$\Leftrightarrow 5x + 10 = 6x - 12 \Leftrightarrow 5x - 6x = -12 - 10$$

$$\Leftrightarrow -x = -22 \Leftrightarrow x = 22 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy khoảng cách giữa hai bến A và B là $5(22 + 2) = 120$ (km).

$$3. \quad a) \quad |2 - 4x| = 6 \Leftrightarrow 2 - 4x = 6 \text{ hoặc } 2 - 4x = -6$$

$$\Leftrightarrow -4x = 6 - 2 \text{ hoặc } -4x = -6 - 2$$

$$\Leftrightarrow -4x = 4 \text{ hoặc } -4x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2.$$

Tập nghiệm : $S = \{-1; 2\}$.

b) Điều kiện : $x + 5 \neq 0$ và $x - 5 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \pm 5 \text{ (Khi đó : } x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5) \neq 0)$$

$$\text{MTC : } x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

Quy đồng và khử mẫu, ta được : $x = x - 5 + (1 - x)(x + 5)$

$$\Leftrightarrow x = x - 5 + x + 5 - x^2 - 5x \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -4 \text{ (thỏa đk : } x \neq \pm 5)$$

Tập nghiệm : $S = \{0; -4\}$.

c) Điều kiện : $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$$\text{Khi đó : } |x - 1| = 2x \Leftrightarrow x - 1 = 2x \text{ hoặc } x - 1 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa đk : } x \geq 0)$$

Tập nghiệm : $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

$$4. \text{ Ta có: } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow a(b+c) < (a+c)b$$

(vì $a > 0, b > 0$ và $c > 0 \Rightarrow b+c > 0$ và $a+c > 0$)

$$\Leftrightarrow ab + ac < ab + bc$$

$$\Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow a < b \text{ (luôn đúng, theo gt).}$$

5. a) Ta có E là trung điểm của AB, H là trung điểm của BD

\Rightarrow HE là đường trung bình của $\triangle ABD$

$$\Rightarrow HE \parallel AD \text{ và } HE = \frac{1}{2}AD.$$

Tương tự, ta có: $FG \parallel AD$ và $FG = \frac{1}{2}AD$

$$\Rightarrow HE \parallel FG \text{ và } HE = FG.$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$EF \parallel HG \text{ và } EF = HG = \frac{1}{2}BC.$$

Lại có $AD = BC$ (gt) $\Rightarrow EH = HG = FG = EF$.

Vậy EFGH là hình thoi.

b) Hình thoi EFGH là hình vuông $\Leftrightarrow \widehat{HEF} = 90^\circ$

$$\Leftrightarrow HE \perp FE \Leftrightarrow AD \perp BC \text{ (vì } AD \parallel HE \text{ và } BC \parallel FE)$$

(Gọi M là giao điểm của AD và BC)

$$\Leftrightarrow \widehat{DMC} = 90^\circ \Leftrightarrow \triangle DMC \text{ vuông cân tại M.}$$

$$\Leftrightarrow \text{Hình thang cân } ABCD \text{ (} AB \parallel CD \text{) có } \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 45^\circ.$$

6. a) Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ có:

$$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

\hat{A} chung

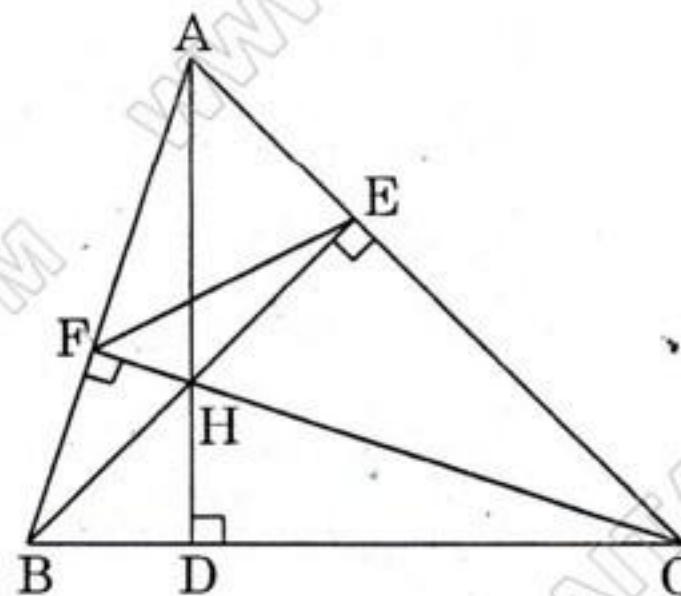
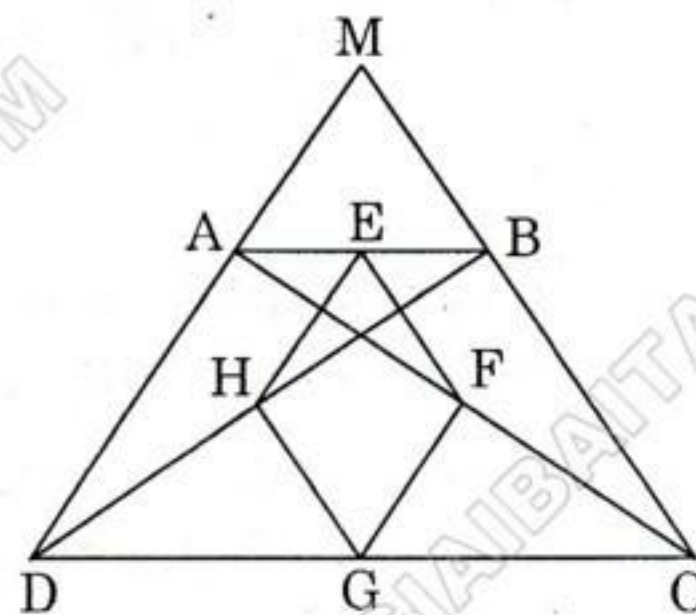
Vậy $\triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AF \cdot AB = AE \cdot AC \text{ (1)}$$

b) Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có: \hat{A} chung và (1)

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}.$$

$$c) \triangle AEF \sim \triangle ABC \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 4S_{AEF}.$$



d) Ta có $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AF}{EA} = \frac{AC}{AB}$

Tương tự ta có : $\triangle BDF \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BD}{FB} = \frac{BA}{BC}$

$\triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CE}{DC} = \frac{CB}{CA}$

Do đó $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CB}{CA} = 1$ (đpcm).

ĐỀ SỐ 3

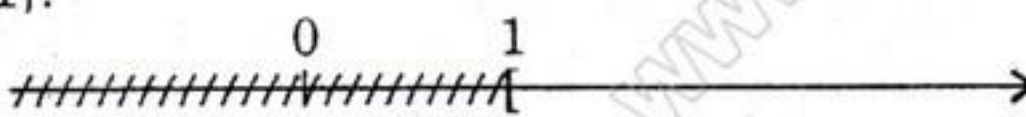
- Giải bất phương trình : $(x - 2)^2 + 2(x - 1) \leq x^2 + 4$ và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.
- Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 60km/h và đi từ B về A với vận tốc 45km/h. Thời gian cả đi và về hết 7 giờ. Tính quãng đường AB.
- Giải phương trình :
 - $\frac{9}{x^2 - 4} = \frac{x - 1}{x + 2} + \frac{3}{x - 2}$
 - $|x - 5| = 2x$
- Chứng minh rằng nếu $a + b = 1$ thì $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.
- Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AD = 6cm, A'B' = 4cm, CC' = 3,5cm.
 - Tính độ dài các cạnh còn lại của hình hộp chữ nhật.
 - Tính độ dài đoạn BD (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).
- Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $AB = AD = \frac{1}{2}CD$. Gọi M là trung điểm của CD và H là giao điểm của AM và BD.
 - Chứng minh tứ giác ABMD là hình thoi.
 - Chứng minh $DB \perp BC$.
 - Chứng minh $\triangle AHD$ và $\triangle CBD$ đồng dạng.
 - Biết AB = 2,5cm; BD = 4cm. Tính độ dài cạnh BC và diện tích hình thang ABCD.

Giải

$$1. (x - 2)^2 + 2(x - 1) \leq x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 2x - 2 \leq x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \geq 1\}$.

Biểu diễn tập nghiệm : 

2. Gọi x là quãng đường AB (x tính bằng km; $x > 0$).

Thời gian đi từ A đến B là : $\frac{x}{60}$ (giờ);

Thời gian đi từ B về A là : $\frac{x}{45}$ (giờ).

Theo đề ra, ta có phương trình : $\frac{x}{60} + \frac{x}{45} = 7$

$$\Leftrightarrow 3x + 4x = 7.180 \quad \Leftrightarrow 7x = 7.180 \quad \Leftrightarrow x = 180 \text{ (nhận)}$$

Trả lời : Quãng đường AB dài 180km.

3. a) Điều kiện : $x + 2 \neq 0$ và $x - 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \pm 2 \quad (\text{Khi đó : } x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \neq 0)$$

Quy đồng và khử mẫu, ta được :

$$9 = (x - 1)(x - 2) + 3(x + 2) \quad \Leftrightarrow 9 = x^2 - 3x + 2 + 3x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -1$$

Tập nghiệm : $S = \{-1; 1\}$.

b) Điều kiện : $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

$$\text{Khi đó : } |x - 5| = 2x \quad \Leftrightarrow x - 5 = 2x \text{ hoặc } x - 5 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ hoặc } x = \frac{5}{3}$$

Vì $x \geq 0$, nên ta lấy $x = \frac{5}{3}$. Tập nghiệm : $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

4. Ta có : $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$.

Thay vào bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$, ta được :

$$a^2 + (1 - a)^2 \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a + a^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow (2a - 1)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

5. a) Ta có $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên $C'D' = A'B' = 4$ (cm).

Chứng minh tương tự, ta có :

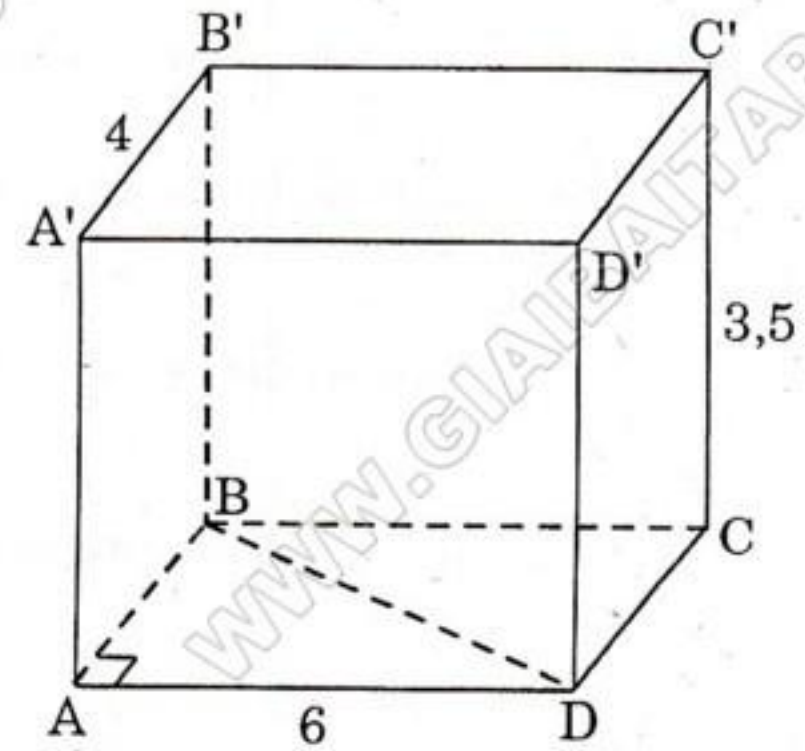
$$AB = CD = C'D' = A'B' = 4 \text{ (cm)}$$

$$BB' = AA' = DD' = CC' = 3,5 \text{ (cm)}$$

$$A'D' = B'C' = BC = AD = 6 \text{ (cm)}.$$

- b) ABCD là hình chữ nhật nên $\triangle ABD$ vuông tại A, ta có :

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2} \text{ (định lí Py-ta-go)} \\ &= \sqrt{4^2 + 6^2} \approx 7,2 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$



6. a) Ta có : $AB = AD = \frac{1}{2} CD$ và M là trung điểm của CD (gt)

$$\Rightarrow AB = DM \text{ và } AB \parallel DM.$$

Do đó tứ giác ABMD là hình bình hành có $AB = AD$. Vậy ABMD là hình thoi.

- b) M là trung điểm của DC nên BM là trung tuyến của $\triangle BDC$ mà $MB = MD = MC$. Do đó $\triangle BDC$ là tam giác vuông tại B hay $DB \perp BC$.

- c) ABMD là hình thoi (cmt) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$

Do đó hai tam giác vuông AHD và CBD đồng dạng (g.g).

- d) Ta có : $HB = HD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ (cm)}$

Xét tam giác vuông AHB, ta có :

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AB^2 - HB^2} \text{ (định lí Py-ta-go)} \\ &= \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AM = 3 \text{ (cm)}$$

Dễ thấy tứ giác ABCM là hình bình hành ($AB \parallel CM$ và $AB = CM$)

$$\Rightarrow BC = AM = 3 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Ta có : } S_{BDC} = \frac{1}{2} BD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

M là trung điểm của DC nên

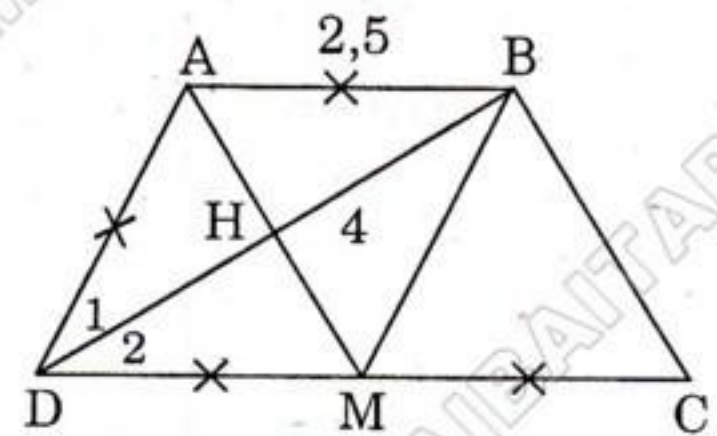
$$S_{BMD} = S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{BCD} = 3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

(chung đường cao kẻ từ B và $MD = MC$)

Mặt khác $\triangle ABD = \triangle MDB$ (ABCD là hình thoi)

$$\Rightarrow S_{ABD} = S_{BMD} = 3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BMD} + S_{BMC} = 9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



ĐỀ SỐ 4

1. Giải bất phương trình : $3x^2 + x > 3(x - 2)(x + 2)$.
2. Tìm x, sao cho : $\frac{x+1}{x-1} < 0$.
3. Giải phương trình :
a) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{12}{x^2-4} + 1$ b) $|2x - 5| = 2 - x$.
4. Chứng minh rằng : $a^4 + 16 \geq 2a^3 + 8a$.
5. Một số có hai chữ số, biết chữ số hàng đơn vị gấp đôi chữ số hàng chục. Nếu đặt chữ số 2 xen giữa hai chữ số thì được một số lớn hơn số đã cho là 200. Tìm số đã cho.
6. Cho M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, AC, CD, BD của tứ giác ABCD. Tìm điều kiện để MNPQ là hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.
7. Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi P là trung điểm của cạnh AB và N là giao điểm của đường thẳng AD và CP.
a) Chứng minh P là trung điểm của NC.
b) Chứng minh $\triangle NCD$ và $\triangle PBC$ đồng dạng.
c) Chứng minh diện tích hình thoi bằng 4 lần diện tích $\triangle PBC$.
d) Gọi M là giao điểm của BN và DP. Chứng minh $PA \cdot PB = PD \cdot PM$.

Giải

$$\begin{aligned} 1. \quad 3x^2 + x > 3(x - 2)(x + 2) &\Leftrightarrow 3x^2 + x > 3(x^2 - 4) \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + x > 3x^2 - 12 \Leftrightarrow x > -12 \end{aligned}$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x > -12\}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{Trường hợp 1 : } x + 1 > 0 \text{ và } x - 1 < 0 &\Leftrightarrow x > -1 \text{ và } x < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 1. \end{aligned}$$

$$\text{Trường hợp 2 : } x + 1 < 0 \text{ và } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ và } x > 1 \text{ (VN)}$$

Vậy $-1 < x < 1$.

$$\begin{aligned} 3. \quad \text{a) Điều kiện : } x - 2 \neq 0 \text{ và } x + 2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ và } x \neq -2 \quad (\text{Khi đó : } x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \neq 0) \end{aligned}$$

$$\text{MTC : } x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Quy đồng và khử mẫu, ta được :

$$(x + 1)(x + 2) - 5(x - 2) = 12 + x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + x + 2 - 5x + 10 = 8 + x^2$$

$$\Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (vì } x \neq \pm 2 \text{ nên } x = 2 \text{ bị loại)}$$

Tập nghiệm : $S = \emptyset$.

b) Điều kiện : $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Khi đó :

$$\begin{aligned} |2x - 5| = 2 - x &\Leftrightarrow 2x - 5 = 2 - x \text{ hoặc } 2x - 5 = -(2 - x) \\ &\Leftrightarrow 3x = 7 \text{ hoặc } x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = 3 \end{aligned}$$

($x = \frac{7}{3}$; $x = 3$ không thỏa điều kiện $x \leq 2$)

Tập nghiệm : $S = \emptyset$.

$$\begin{aligned} 4. \quad a^4 + 16 &\geq 2a^3 + 8a \Leftrightarrow a^4 + 16 - 2a^3 - 8a \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a^4 - 2a^3) - (8a - 16) \geq 0 \Leftrightarrow a^3(a - 2) - 8(a - 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 2)(a^3 - 8) \geq 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 2)^2 [(a + 1)^2 + 3] \geq 0 \\ &\quad (\text{luôn đúng vì } (a - 2)^2 \geq 0 \text{ và } (a + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + 1)^2 + 3 > 0). \end{aligned}$$

5. Gọi chữ số hàng chục của số đã cho là x ($0 < x \leq 9$; $x \in \mathbf{N}$), khi đó chữ số hàng đơn vị là $2x$.

Vậy số phải tìm có dạng $\overline{x(2x)} = 10x + 2x$

Khi xen chữ số 2 vào, ta được số $\overline{x2(2x)} = 100x + 2 \cdot 10 + 2x$

Theo bài ra, ta có phương trình : $100x + 2 \cdot 10 + 2x = (10x + 2x) + 200$

$$\Leftrightarrow 102x + 20 = 12x + 200 \Leftrightarrow 90x = 180 \Leftrightarrow x = 2$$

Trả lời : Số cần tìm là 24.

6. Dễ thấy MNPQ là hình bình hành ($MN \parallel PQ$) và $MN = PQ = \frac{1}{2}BC$.

* Hình bình hành MNPQ là hình chữ nhật

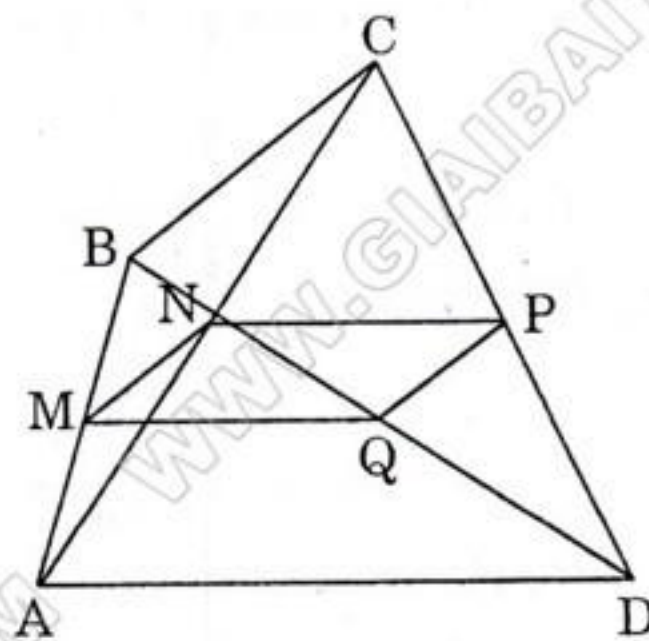
$$\Leftrightarrow \widehat{MNP} = 1v \Leftrightarrow MN \perp NP \Leftrightarrow BC \perp AD$$

* Hình bình hành MNPQ là hình thoi

$$\Leftrightarrow MN = PN \Leftrightarrow BC = AD$$

* Hình bình hành MNPQ là hình vuông

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BC \perp AD \\ BC = AD. \end{cases}$$



7. a) Ta có $AD \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{NAP} = \widehat{CBA}$ (so le trong)

Xét $\triangle NAP$ và $\triangle CBP$ có $\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2$ (đối đỉnh), $PA = PB$ (gt),

$$\widehat{NAP} = \widehat{CBA} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle NAP = \triangle CBP$ (g.c.g) $\Rightarrow NP = PC$ hay P là trung điểm của NC.

b) Vì $AD \parallel BC$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{N}$ (so le trong)

Mặt khác ABCD là hình thoi nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$

Do đó $\triangle NDC \sim \triangle CBP$ (g.g).

c) Ta có $\triangle NAP = \triangle CBP$ (cmt) $\Rightarrow S_{NAP} = S_{CBP}$

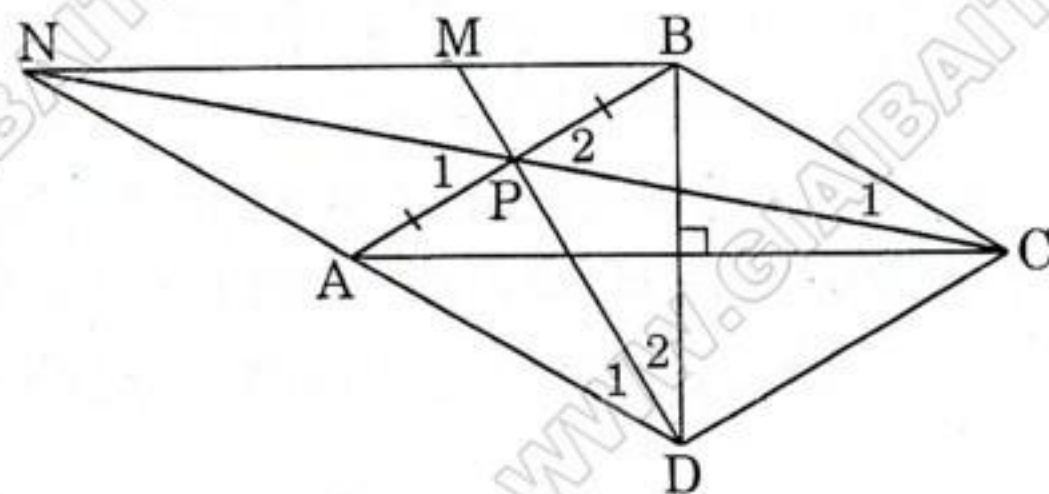
Do đó $S_{NDC} = S_{ABCD}$ (1)

Mà $\triangle NDC \sim \triangle CBP$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{S_{NDC}}{S_{CBP}} = \left(\frac{DC}{BP}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{NDC} = 4S_{CBP} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S_{ABCD} = 4S_{CBP}$.



d) Nối A với C. Xét $\triangle NPB$ và $\triangle APC$ có $AP = BP$ (gt), $\widehat{NPB} = \widehat{CPA}$ (đối đỉnh), $NP = CP$ (cmt)

Do đó $\triangle NPB = \triangle APC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NBA} = \widehat{CAB}$

$\Rightarrow NB \parallel AC$ (cặp góc so le trong bằng nhau) mà $AC \perp BD$ (tính chất đường chéo hình thoi)

$\Rightarrow NB \perp BD$ hay $\widehat{NBD} = 90^\circ$ mà $\widehat{ABD} = 60^\circ$ (vì $\widehat{ABC} = 120^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{NBA} = 30^\circ$.

Mặt khác $\triangle ABD$ là tam giác đều nên trung tuyến DP đồng thời là đường phân giác hay $\widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \frac{\widehat{ADB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Xét $\triangle BPM$ và $\triangle DPA$ có $\widehat{NBA} = \widehat{D_1} = 30^\circ$, $\widehat{BPM} = \widehat{DPA}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle BPM \sim \triangle DPA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PA}{PM} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PD \cdot PM$.

ĐỀ SỐ 5

1. Giải bất phương trình : $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$.

2. Giải phương trình :

a) $|x-1| = |1+x|$

b) $\frac{2-x}{x-1} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{2x}{1-x^2}$.

3. Chứng minh rằng : $a^2 + \frac{1}{4} \geq a$.

4. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể, vòi thứ nhất mỗi phút chảy được 40 lít, vòi thứ hai mỗi phút chảy được 30 lít. Nếu cho vòi thứ hai chảy nhiều hơn vòi thứ nhất 6 phút thì cả hai vòi chảy được lượng nước như nhau và bằng nửa lượng nước ở bể. Tính dung tích của bể.

5. Tam giác ABC có $\widehat{A} \leq 90^\circ$, đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Từ B kẻ Bx vuông góc với AC. Từ C kẻ đường thẳng Cy vuông góc với AB, Bx cắt Cy tại K. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh :

a) Ba điểm H, I, K thẳng hàng.

b) Tam giác ABC phải có điều kiện gì để tứ giác BHCK là hình thoi, là hình vuông.

6. Cho hình vuông ABCD có I thuộc AB. Gọi M là giao điểm của DI và BC. Qua D kẻ Dx vuông góc với DM và Dx cắt BC tại N.

a) Chứng tỏ rằng $AI \cdot BM = AD \cdot IB$.

b) Chứng minh $\triangle DIN$ vuông cân. Chứng minh $\frac{1}{DN^2} + \frac{1}{DM^2}$ không đổi.

Giải

$$1. \frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x \Leftrightarrow 3(3x+5) - 6 \leq 2(x+2) + 6x$$

$$\Leftrightarrow 9x + 15 - 6 \leq 2x + 4 + 6x$$

$$\Leftrightarrow 9x - 8x \leq 4 - 9 \Leftrightarrow x \leq -5$$

Tập nghiệm : $S = \{x \mid x \leq -5\}$.

$$2. a) |x-1| = |1+x| \Leftrightarrow x-1 = 1+x \text{ hoặc } x-1 = -(1+x)$$

$$\Leftrightarrow -1 = 1 \text{ (vô nghiệm) hoặc } x-1 = -1-x$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Tập nghiệm : $S = \{0\}$.

b) Điều kiện : $x-1 \neq 0$ và $x+1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ và } x \neq -1 \quad (\text{Khi đó : } 1-x^2 = -(x^2-1) \neq 0)$$

MTC : $x^2 - 1$. Quy đồng và khử mẫu, ta được :

$$(2-x)(x+1) + (x-3)(x-1) = -2x$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 - x^2 - x + x^2 - x - 3x + 3 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa điều kiện } x \neq \pm 1)$$

Tập nghiệm : $S = \{5\}$.

$$3. \text{Ta có : } a^2 + \frac{1}{4} \geq a \Leftrightarrow 4a^2 + 1 \geq 4a \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

4. Gọi x là thời gian vòi thứ nhất chảy vào bể (x tính bằng phút, $x > 0$).

Khi đó $x+6$ (phút) là thời gian vòi thứ hai chảy vào bể.

Lượng nước của hai vòi như nhau, nên ta có phương trình :

$$40 \cdot x = 30(x+6) \Leftrightarrow 40x = 30x + 180 \Leftrightarrow 10x = 180 \Leftrightarrow x = 18$$

Vậy lượng nước mỗi vòi chảy vào bể sẽ là : $40 \cdot 18 = 720$ (lít)

Trả lời : Dung tích của bể là : $2 \cdot 720 = 1440$ (lít).

5. Trường hợp 1 : $\hat{A} < 90^\circ$

a) Ta có : $CE \perp AB$; $BK \perp AB$ (gt) $\Rightarrow CE \parallel BK$

Tương tự : $BD \parallel CK$ ($\perp AC$)

Do đó tứ giác BHCK là hình bình hành.

I là trung điểm của đường chéo BC

\Rightarrow đường chéo thứ hai HK phải qua I
hay ba điểm H, K, I thẳng hàng.

b) Hình bình hành BHCK là hình thoi

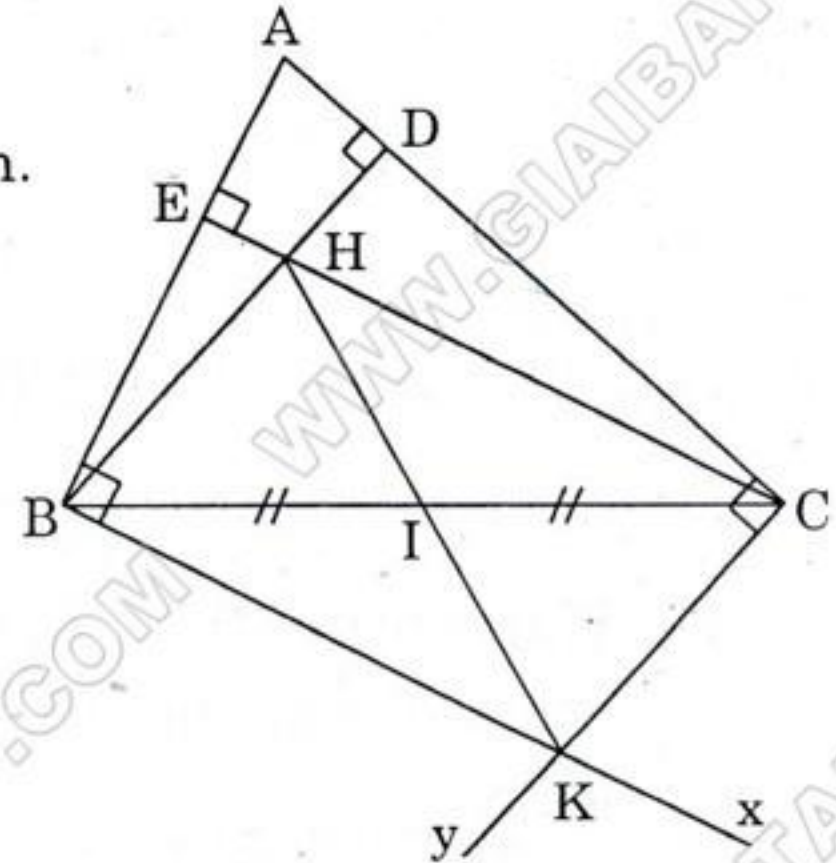
$$\Leftrightarrow BH = CH$$

$$\Leftrightarrow \triangle BHC \text{ cân tại } H \Leftrightarrow \widehat{HBC} = \widehat{HCB}$$

$$\Leftrightarrow \triangle BDC = \triangle ECB \Leftrightarrow BD = CE$$

$$\Leftrightarrow \triangle BDA = \triangle CEA \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A.$$

Hình bình hành BHCK là hình vuông khi BHCK là hình thoi và có 1 góc vuông $\Leftrightarrow BH \perp CH$ mà $CH \perp BA$ nên BH phải trùng với BA hay BD trùng với BA $\Leftrightarrow H$ trùng với A hay $\triangle ABC$ vuông tại A. Vậy để BHCK là hình vuông thì $\triangle ABC$ vuông cân.



* Trường hợp 2 : $\hat{A} = 90^\circ$

Ta có H trùng với A. Khi đó BHCK là hình chữ nhật. Để BHCK là hình thoi thì $AB = AC$ hay tam giác ABC vuông cân tại A.

6. a) Dễ thấy hai tam giác vuông IAD và IBM có $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle IAD \sim \triangle IBM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{IB}{BM} \Rightarrow AI \cdot BM = AD \cdot IB.$$

b) Ta có : $Dx \perp DM$ (gt) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_3$ (cùng phụ với \hat{D}_2)

$$\text{Do đó } \triangle IAD = \triangle NCD \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow DI = DN$$

Vậy $\triangle DIN$ vuông cân tại D.

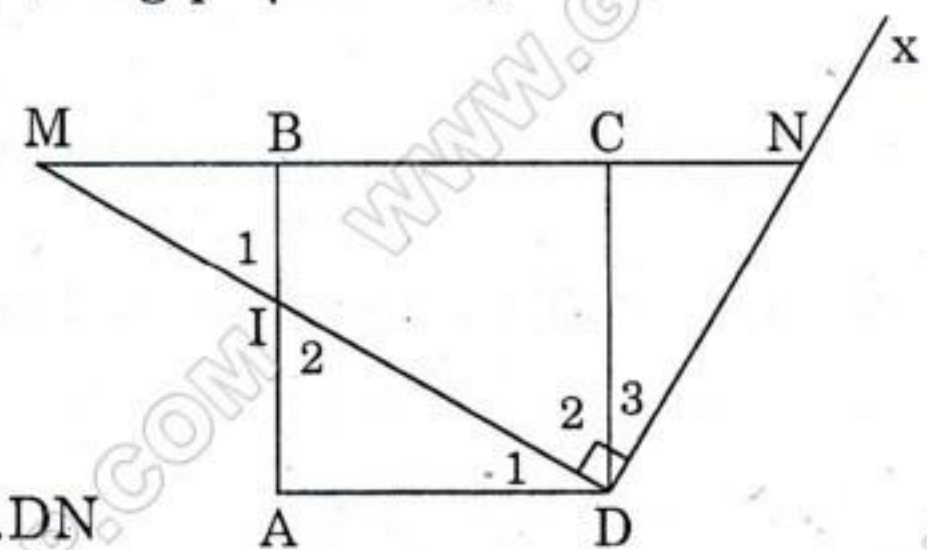
c) Ta có $\triangle DCN \sim \triangle MDN$ (g.c.g)

$$\Rightarrow \frac{DC}{DM} = \frac{DN}{MN} \Rightarrow DC \cdot MN = DM \cdot DN$$

$$\Rightarrow DC^2 \cdot MN^2 = DM^2 \cdot DN^2 \text{ hay } DC^2(DM^2 + DN^2) = DM^2 \cdot DN^2$$

$$\Rightarrow DC^2 = \frac{DM^2 \cdot DN^2}{DM^2 + DN^2} \Rightarrow \frac{1}{DC^2} = \frac{DM^2 + DN^2}{DM^2 \cdot DN^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{DN^2} + \frac{1}{DM^2} = \frac{1}{DC^2} \text{ (không đổi).}$$



MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
-------------------	---

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. Mở đầu về phương trình.....	5
§2. Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải. Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$	9
§3. Phương trình tích	14
§4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu	18
§5, 6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	22
Một số đề kiểm tra một tiết.....	26

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng.....	34
§2. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân.....	37
§3. Bất phương trình một ẩn	41
§4. Bất phương trình bậc nhất một ẩn.....	45
§5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.....	50
Một số đề kiểm tra một tiết.....	54

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§1, 2. Định lý Ta-lét. Định lý đảo và hệ quả của định lý Ta-lét	62
§3. Tính chất đường phân giác của tam giác	71
§4, 5, 6, 7. Khái niệm tam giác đồng dạng. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác	75
§8, 9. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông. Ứng dụng thực tế.....	85
Một số đề kiểm tra một tiết.....	95

Chương IV. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU

§1, 2, 3. Hình hộp chữ nhật. Thể tích hình hộp chữ nhật	105
§4, 5, 6. Hình lăng trụ đứng. Diện tích xung quanh. Thể tích	111
§7, 8, 9. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều. Diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp đều.....	116
Một số đề kiểm tra một tiết.....	124
Một số đề kiểm tra học kì II	128